John Singer Sargent: Hercules and the Hydra

($\Rightarrow$) Wähle $F := F_M$

$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Standardbasen

$\mathcal{B}' :=$ Spalten von T

$\mathcal{C}' :=$ Spalten von S

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M"] \arrow[dr, equal, "\Phi_{\mathcal{B}} = id"'] & & & K^m \arrow[dl, equal, "\Phi_{\mathcal{C}} = id"] \\
& K^n \arrow[r, "(F_M \hat{=})\, M"] & K^m & \\
K^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{B}'} \hat{=}\, T"] \arrow[rrr, "S^{-1} \cdot M \cdot T = M'"'] & & & K^m \arrow[ul, "S \,\hat{=}\, \Phi_{\mathcal{C}'}"']
\end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Wähle $S := M\left(\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{C}'}\right)$

$T := M\left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}\right)$

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M"] \arrow[dr, "\cong \Phi_{\mathcal{B}}"] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{C}} \cong"'] \\
& V \arrow[r, "F"] & W & \\
K^n \arrow[uu, "M(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}) = T"] \arrow[ur, "\cong \Phi_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[rrr, "M'"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{C}'} \cong"] \arrow[uu, "M(\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{C}'}) = S"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Welche Paare sind äquivalent?

(a) $M = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{Rang} = 2}$, $\quad M' = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{1}$ Nein.

(b) $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2}$, $\quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{2}$ Ja.

Beweis:

2: Erinnerung (Anfang Vorlesung 18):

Jede Matrix lässt sich durch (endlich viele) elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf Normalform bringen.

$\hat{=}$ Links- und Rechtsmultiplikation mit invertierbarer Matrix.

1: ($\Rightarrow$) s.o.

($\Leftarrow$) Falls $\mathrm{Rang}(M) = \mathrm{Rang}(M')$ für $m \times n$-Matrizen M, M', dann haben M, M' dieselbe Normalform.
(Rang = Anzahl der Pivotelemente)

Laut (2) existieren

S, T: $\quad S^{-1} \cdot M \cdot T$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

Normalform von M

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

Normalform von M'

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

S', T': $\quad (S')^{-1} \cdot M' \cdot T'$

Also $\quad S^{-1} M T = (S')^{-1} M' T'$,

d.h. $\quad \underbrace{S' \cdot S^{-1}}_{\text{invertierbar}} \cdot M \cdot \underbrace{T \cdot (T')^{-1}}_{\text{invertierbar}} = M'$

$\square$

Welche Paare sind ähnlich?

(a) $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang} = 2}$, $M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{1}$

Nicht ähnlich.

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq M$

Nicht ähnlich

(c) $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang } 2}$, $M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{Rang } 2}$

a: M, M' ähnlich

$\Downarrow$

M, M' äquivalent

$\Updownarrow$

$\text{Rang}(M) = \text{Rang}(M')$

b: Hier $T^{-1} \cdot M \cdot T = T^{-1} \cdot T = E_2 = M$

denn $M = E_2$

c.

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{Rang}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \dots = 2$$

($\longrightarrow$ unentschieden)

$$\text{Spur}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$$

$$\text{Spur}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \text{Spur}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

($\longrightarrow$ unentschieden)

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -11$$

$\longrightarrow$ M, M' nicht ähnlich

z.B.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \{1, 2, 3, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$

$$S_2 = \{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}^{id}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\tau} \}$$

$$\cong (\{+1, -1\}, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$$

$id \cong +1 \cong [0]$

$\tau \cong -1 \cong [1]$

$\tau \circ \tau = id$

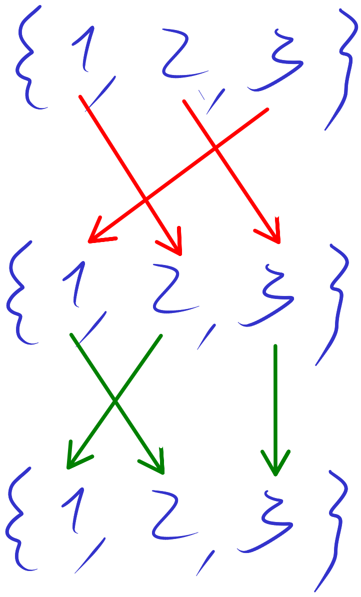
$(-1) \cdot (-1) = 1$

$[1] + [1] = [0]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \{1, 2\} \\ \{1, 2\} \\ \{1, 2\} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

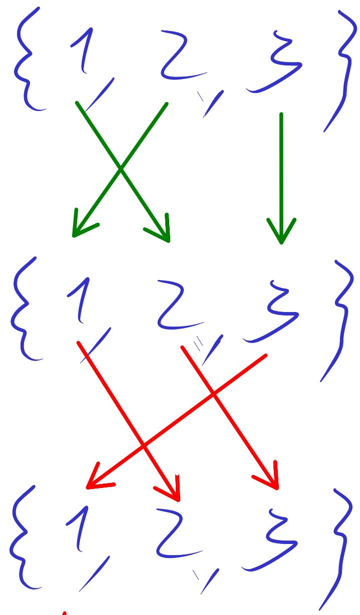
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

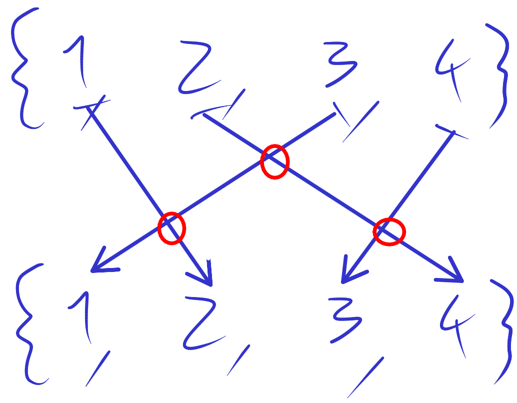


$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht abelsch!

Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$



Fehlstand $\widehat{=}$ Kreuzungspunkt

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^3 = -1.$$