Beweis:

Durch weitere EZU und ESU können wir sogar Normalform $\widetilde{\widehat{A}}$ erreichen ohne dass sich Anzahl der Pivotelemente ändert.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Rang}(A) \\
&\quad \| \quad \text{Vorlesung 17} \\
&\mathrm{Rang}(\widehat{A}) \\
&\quad \| \\
&\mathrm{Rang}(\widetilde{\widehat{A}}) = \dim(\mathrm{Im}(F_{\widetilde{\widehat{A}}})) \\
&\qquad = \dim(\mathrm{span}(e_1, \dots, e_r)) = r
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{\widehat{A}} = \begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & & & & 0 & \\
 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & \ddots & & \\
0 & & & & 1 & \\
\hline
 & & 0 & & & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc}
\uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\
e_1 & e_2 & \dots & & e_r
\end{array}
\end{array}
$$

r ist Anzahl der Pivotelemente

□

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -3$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad -2$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad C$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

(C ist nicht eindeutig, z.B. auch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

<u>Beweis</u>: <u>Linksinverse</u>

Zeilenumformungen
$\hat{=}$ Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix S

(Vorlesung 17)

Also

$$\underbrace{\begin{matrix} \tilde{A} & & B \\ \| & & \| \\ S \cdot A & & S \cdot E_n \\ & & \| \\ & & S \end{matrix}}_{\tilde{A} = B \cdot A}$$

Falls $(\tilde{A})_{\substack{\text{Zeilen} \\ 1 \text{ bis } n}} = E_n$, gilt also

$$(B \cdot A)_{\substack{\text{Zeilen} \\ 1 \text{ bis } n}} = E_n$$

$$\|$$

$$(B)_{\substack{\text{Zeilen} \\ 1 \text{ bis } n}} \cdot A$$

Falls $(\tilde{A})_{\substack{\text{Zeilen} \\ 1 \text{ bis } n}} \neq E_n$, so ist $\text{Rang}(\tilde{A}) < n$.

Somit $\text{Ker}(F_{\tilde{A}}) \neq 0$ nach Rangformel, somit $F_{\tilde{A}}$ nicht injektiv. Somit (Vorlesung 5):

$\nexists$ Abbildung G: $G \circ F_{\tilde{A}} = \text{id}_{K^n}$

Insbesondere

$\nexists$ Matrix C: $\underbrace{F_C \circ F_{\tilde{A}} = \text{id}_{K^n}}_{C \cdot \tilde{A} = E_n}$

$\triangle$

<u>Inverses</u>:

Soeben gesehen $B \cdot A = E_n$.

bzw. $F_B \circ F_A = \text{id}_{K^n}$.

Insbesondere F_A <u>injektive</u> lineare Abbildung zwischen VR derselben endlichen Dimension. Somit (Korollar Ende Vorlesung 14):

F_A Isomorphismus

$$F_B \circ F_A = id \quad \Big| \circ F_A^{-1}$$

$$F_B = F_A^{-1}$$

also $$B = A^{-1}. \qquad \square$$

Matrix $\overset{n\times n}{A}$ invertierbar heißt:

$$\exists \underset{n\times n}{B} : \quad \underbrace{B\cdot A} = A \cdot B = \underbrace{E_n}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A = (a_{ij}),\quad B = (b_{jk}) \right.$$

$$(A \cdot B) = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right)_{i,k}$$

$$^t(A \cdot B) = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right)_{k,i}$$

$$= \left(\sum_j a_{kj} b_{ji} \right)_{i,k}$$

Um-
be-
nennung

$$\|$$

$$^tB \cdot {}^tA = \left(\sum_j b_{ji} a_{kj} \right)_{i,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenrang $(A) = 2$

Zeilenrang $(A) = 2$

$z_i \in \mathbb{R}^2$

Beweis:

1: $F_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$\begin{aligned} e_1 &\longmapsto s_1 \\ &\vdots \\ e_n &\longmapsto s_n \end{aligned}$$

Daher $\operatorname{Im} F_A = \operatorname{span}(s_1, \dots, s_n)$

2: Vorlesung 17, letzter Satz:

Rang invariant unter EZU und ESU.

Somit (nach (1)) auch Spaltenrang invariant.

Es folgt dass auch Zeilenrang invariant ist unter EZU & ESU:

$$\begin{aligned} \text{Zeilenrang}(S\,A\,T) &= \text{Spaltenrang}\left({}^t(SAT)\right) \\ &= \text{Spaltenrang}\left({}^tT \cdot {}^tA \cdot {}^tS\right) \\ &= \text{Spaltenrang}({}^tA) \\ &= \text{Zeilenrang}(A) \end{aligned}$$

Invertierbar

Also reicht es 2 für A in Normalform zu prüfen.

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \text{Null} & & & 1\end{matrix} & \text{Null} \\ \hline \text{Null} & \text{Null}\end{array}\right)$$

— hier 2 klar $\square$

z.B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ voller Spaltenrang

$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$ voller Zeilenrang

Beweis:

① folgt aus unserem Rezept für Berechnung von Linksinversen.

② analog oder:

A besitzt Linksinverses
$\iff$ ${}^tA$ " Rechtsinverses

A hat vollen Spaltenrang
$\iff$ ${}^tA$ " " Zeilenrang.

Also folgt ② aus ① $\square$

Beweis:

Sei $A := (v_1 \dots v_n)$.

$$F_A(e_i) = v_i$$

für $e_1, \dots, e_n \in K^n$ Standardbasis.

Satz in Vorlesung 14:

$(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig $\iff F_A$ injektiv

$(v_1, \dots, v_n)$ Erzeugenden-System $\iff F_A$ surjektiv

Andererseits:

$$F_A \text{ injektiv} \iff \dim(\operatorname{Ker} F_A) = 0$$

$$\underset{\text{Rangformel}}{\iff} \underbrace{\dim(K^n)}_{n} = \underbrace{\dim(\operatorname{Im} F_A)}_{\operatorname{Rang}(A)}$$

$$F_A \text{ surjektiv} \iff \underbrace{\dim(\operatorname{Im} F_A)}_{\operatorname{Rang}(A)} = \underbrace{\dim K^m}_{m}$$

$\square$