K Körper

Def: Ein <u>lineares Gleichungssystem / K</u> (LGS) ist eine Gleichung der Form

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

für ein $A \in M(m \times n; K)$

variabel → $\underline{x} \in K^n$

$\underline{b} \in K^m$

fixiert

$$\text{Lös}(A, \underline{b}) = \{ \underline{x} \in K^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b} \}$$

Ein LGS mit $\underline{b} = \underline{0}$ ist <u>homogen</u>.

$$\text{Lös}(A) := \text{Lös}(A, \underline{0})$$

Satz: $\text{Lös}(A) \subset K^n$ ist ein UVR

(3.3.1 / 3.3.3 (2))

$$\dim_K(\text{Lös}(A)) = n - \text{Rang}(A)$$

n = Anzahl der Spalten von A

= Anzahl der Unbekannten x_i

Def: (3.3.2) $\underline{\text{Rang}}(A) := \text{Rang}(F_A)$

$(= \dim(\operatorname{Im}(F_A)))$

Korollar: Jedes homogene LGS mit mehr Unbekannten als Zeilen (d.h. $n > m$) besitzt mindestens eine Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Satz: (3.3.1) Existiert eine Lösung $\underline{x}_0 \in \text{Lös}(A, \underline{b})$, so ist

$$\text{Lös}(A, \underline{b}) = \underline{x}_0 + \text{Lös}(A)$$

(affiner Raum Lös(A))

Wie $\text{Lös}(A \mid \underline{b})$ berechnen?

Wie $\text{Rang}(A)$ bestimmen?

Erinnerung (Vorlesung 4, 13):

Eine <u>elementare</u> $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeilen}}{\text{Spalten}}$ <u>umformung</u> ($E\genfrac{}{}{0pt}{}{Z}{S}U$):

(Vert.) Vertauschung zweier $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeilen}}{\text{Spalten}}$

(Add.) Addition des λ-fachen einer $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeile}}{\text{Spalte}}$ zu einer <u>anderen</u> $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeile}}{\text{Spalte}}$, für ein $\lambda \in K$.

(Skalarm.) Multiplikation einer $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeile}}{\text{Spalte}}$ mit $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

Def: (3.7.1) Elementarmatrizen

$$E_{k\leftrightarrow l} := \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & k & & & & l & & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

P_l^k

Einträge:

$e_{kl} = e_{lk} = 1$

$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k, l$

sonst 0

$$E_{k\,\underset{l}{\lambda}} := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & k & & & & & & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & \lambda & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$(\lambda \in K)$

$Q_l^k(\lambda)$

$e_{lk} = \lambda \in K$

$e_{ii} = 1 \quad \forall i$

sonst 0

$$E_{\lambda \cdot k} := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & & k & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \lambda & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$(\lambda \in K^\times)$

$S_k(\lambda)$

$e_{kk} = \lambda \in K^\times$

$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k$

sonst 0

[F&S Seite 183]

Satz (3.7.1): Die EZU entsprechen **Linksmultiplikation** mit den Elementarmatrizen:

$E_{k \leftrightarrow l} \cdot A$ geht aus A durch Vertauschen der Zeilen k & l hervor.

$E_{k \lambda l} \cdot A$ geht aus A durch Addition des λ-fachen von Zeile k zu Zeile l hervor.

$E_{\lambda \cdot k} \cdot A$ geht aus A durch Multipl. der Zeile k mit $\lambda \in K^*$ hervor.

Die ESU entsprechen **Rechtsmultiplikation** mit Elementarmatrizen:

$A \cdot E_{k \leftrightarrow l}$ ...

$A \cdot E_{k \lambda l}$ geht aus A durch Addition des λ-fachen von Spalte l zu Spalte k hervor.

$A \cdot E_{\lambda \cdot k} \quad \ldots$

Def: $A \in M(n\times n, K)$ <u>invertierbar</u>,
(3.5.6)
falls $A^{-1} \in M(n\times n, K)$ mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$ existiert.

Notiz: A invertierbar
(3.5.6)
$\Longleftrightarrow$ F_A Isomorphismus.

In diesem Fall $F_{A^{-1}} = (F_A)^{-1}$

Satz: $A \in \mathrm{Mat}(n\times n; K)$
(3.5.6)
invertierbar

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(A) = n$.

Notiz: Die Elementarmatrizen
(3.7.2)
sind invertierbar.

$$(E_{k\leftrightarrow l})^{-1} = E_{k\leftrightarrow l}$$

$$(E_{\lambda\cdot k})^{-1} = E_{\lambda^{-1}\cdot k} \qquad (\lambda \in K^\times)$$

$$(E_{k\lambda_l})^{-1} = E_{k(-\lambda)_l}$$

Def (Vorlesung 3) $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ LGS

$(A, \underline{b})$ <u>erweiterte (Koeffizienten-) Matrix</u>

Korollar (Wdh): (3.3.3 (5))

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich durch EZU nicht:

Geht $(\tilde{A}, \hat{\underline{b}})$ aus $(A, \underline{b})$ durch EZU hervor, so ist

$$\text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) = \text{Lös}(A, \underline{b}).$$

Satz:

1) Der Rang einer Matrix ändert sich nicht bei Multiplikation mit invertierbaren Matrizen:

$$\mathrm{Rang}(S \cdot A \cdot T) = \mathrm{Rang}(A)$$

für $A \in M(m \times n; K)$
$S \in M(m \times m; K)$ invertierbar
$T \in M(n \times n; K)$ invertierbar

2) Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.