

# Matrizen

$K$  Körper

Def:  $m \times n$ -Matrix über  $K$   
 $= \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ -Tupel  
von Elementen in  $K$

Notation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

Zeile  
(zuerst)

Spalte  
(später)

Def (3.1.1.(c)) Produkt

einer  $m \times n$ -Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j}$   
mit einem Vektor  $\underline{x} = (x_k)_k \in K^n$ :

$$A \cdot \underline{x} := \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{i=1, \dots, m} \in K^m$$

Satz: Das Produkt mit einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  definiert eine  $K$ -lineare Abb.

$$F_A : K^n \longrightarrow K^m \\ x \longmapsto A \cdot x$$

## Hauptsatz (Teil I + II)

Jeder endlich-dim.  $K$ -VR  $V$  ist isomorph zu  $K^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ( $n = \dim_K V$ ). (3.4.1 Korollar 1)

Jede lineare Abbildung  $K^n \longrightarrow K^m$

ist von der Form  $F_A$  für eine eindeutig bestimmte  $m \times n$ -Matrix  $A$ .

(3.4.1 Korollar 2)

Ist  $F = F_A$  nennen wir  $A$  die  $F$  darstellende Matrix.

Beweis zeigt:

Spalten von  $A$

= Bilder der Standardbasisvektoren

Def:  $V, W, K$ -VR

Abbildungsraum

(3.1.3)

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{V \xrightarrow{F} W \mid F \text{ K-linear}\}$$

Endomorphismenring

(3.1.4)

$$\text{End}_K(V) := \text{Hom}_K(V, V)$$

$n, m \in \mathbb{N}$

$$M(n \times m; K) := \{n \times m\text{-Matrizen über } K\}$$

Teil II des Hauptsatzes besagt: <sup>(2.4.1 (b))</sup>

$$M(n \times m, K) \xrightarrow{\quad} \text{Hom}_K(K^n, K^m)$$

$A \quad \mapsto \quad F_A$

ist eine Bijektion.

Notiz (3.1.3):

$\text{Hom}_K(V, W)$  ist ein  $K$ -VR  
bezüglich der „punktweiser“ Addition  
und Skalarmultiplikation:

$$(F+G)(v) := F(v) + G(v)$$

$$(\lambda \cdot F)(v) := \lambda \cdot F(v)$$

für  $F, G \in \text{Hom}_K(V, W)$ ,  $\lambda \in K$ .

Notiz (2.4.1 (6))

$M(n \times n; K)$  ist ein  $K$ -VR  
bezüglich:

$$(a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} := (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$

$$\lambda \cdot (a_{ij})_{ij} := (\lambda \cdot a_{ij})_{ij}$$

Es ist  $M(n \times n, K) \cong K^{n \cdot n}$ .

Korollar (aus Hauptsatz): (3.4.2)

Die Abbildung

$$M(n \times n, K) \longrightarrow \text{Hom}_K(K^n, K^n) \\ A \longmapsto F_A$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR.

Addition/Skalarm.  
von Matrizen  $\cong$  Addition/Skalarm.  
linearer Abb.

?  $\cong$  Komposition  
 $F_A \circ F_B$

Def. (3.5.2)

Produkt zweier Matrizen

$$A = (a_{ij}) \in M(l \times m; K)$$

$$B = (b_{ij}) \in M(m \times n; K)$$

ist gegeben durch

$$A \cdot B := \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1, \dots, l \\ k=1, \dots, n}} \in M(l \times n; K)$$

Einheitsmatrix  $\in M(n \times n; K)$

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Satz

$$F_{A \cdot B} = F_A \circ F_B$$

$$F_{E_n} = \text{id}_{K^n}$$

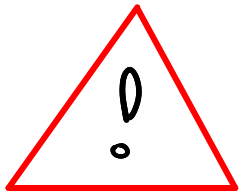
Korollar (aus Hauptsatz und Satz oben)

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $M(\overset{\swarrow}{n} \times \overset{\searrow}{n}, K)$   
ein Ring mit Eins ( $= E_n$ ). (3.5.4)

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (M(n \times n; K), +, \cdot) & \longrightarrow & (\text{End}_K(K^n), +, \circ) \\ A & \longmapsto & F_A \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von  
Ringern mit Eins.



$M(n \times n, K)$  nicht  
kommutativ