Matrizen

K Körper

Def: <u>$m \times n$-Matrix</u> über K
$= \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\}$-Tupel von Elementen in K

Notation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Zeile (zuerst)   Spalte (später)

Def (3.1.1.(c)) <u>Produkt</u>

einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Vektor $\underline{x} = (x_k)_k \in K^n$:

$$\boxed{A \cdot \underline{x} := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_{i=1,\dots,m}} \in K^m$$

Satz: (3.1.1.(c)) Das Produkt mit einer $m \times n$-Matrix A definiert eine K-lineare Abb.

$$F_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$\underline{x} \longmapsto A \cdot \underline{x}$$

Hauptsatz (Teil I + II)

Jeder endlich-dim. K-VR V ist isomorph zu K^n für ein $n \in \mathbb{N}$ $(n = \dim_K V)$. (3.4.1 Korollar 1)

Jede lineare Abbildung
$$K^n \longrightarrow K^m$$
ist von der Form F_A für eine eindeutig bestimmte $m \times n$-Matrix A. (3.4.1 Korollar 2)

Ist $F = F_A$ nennen wir A die <u>F darstellende Matrix.</u>

Beweis zeigt:

Spalten von A

= Bilder der Standardbasisvektoren

Def: V, W K-VR

<u>Abbildungsraum</u> (3.1.3)

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{V \xrightarrow{F} W \mid F \ K\text{-linear}\}$$

<u>Endomorphismenring</u> (3.1.4)

$$\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

$n, m \in \mathbb{N}$

$$M(m \times n; K) := \{m \times n\text{-Matrizen über } K\}$$

Teil II des Hauptsatzes besagt: (2.4.1(b))

$$M(m \times n, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$
$$A \longmapsto F_A$$

ist eine Bijektion.

Notiz (3.1.3):
$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist ein K-VR bezüglicher „punktweiser" Addition und Skalarmultiplikation:

$$(F+G)(\underline{v}) := F(\underline{v}) + G(\underline{v})$$

$$(\lambda \cdot F)(\underline{v}) := \lambda \cdot F(\underline{v})$$

für $F, G \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $\lambda \in K$.

Notiz (2.4.1 (b))
$M(m \times n; K)$ ist ein K-VR bezüglich:

$$(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} := (\lambda \cdot a_{ij})_{i,j}$$

Es ist $M(m \times n, K) \cong K^{n \cdot m}$.

Korollar (aus Hauptsatz): (3.4.2)

Die Abbildung

$$M(m\times n, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$

$$A \longmapsto F_A$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Addition/Skalarm. von Matrizen $\hat{=}$ Addition/Skalarm. linearer Abb.

? $\hat{=}$ Komposition

$F_?$ = $F_A \circ F_B$

Def. (3.5.2)

Produkt zweier Matrizen

$A = (a_{ij}) \in M(l \times m; K)$

$B = (b_{ij}) \in M(m \times n; K)$

ist gegeben durch

$$A \cdot B := \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ k=1,\dots,n}} \in M(l \times n; K)$$

Einheitsmatrix $\in M(n \times n; K)$

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Satz $F_{A \cdot B} = F_A \circ F_B$

$F_{E_n} = \mathrm{id}_{K^n}$

Korollar (aus Hauptsatz und Satz oben)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $M(n \times n; K)$ ein Ring mit Eins $(= E_n)$. (3.5.4)

Die Abbildung

$$(M(n \times n; K), +, \cdot) \longrightarrow (\mathrm{End}_K(K^n), +, \circ)$$

$$A \longmapsto F_A$$

ist ein Isomorphismus von Ringen mit Eins.

$M(n \times n, K)$ nicht kommutativ