$F(\underline{v} + \underline{w}) = F(\underline{v}) + F(\underline{w})$

(daher auch $F(\underline{0}) = \underline{0}$

$F(-\underline{v}) = -F(\underline{v})$

siehe 7. Vorlesung)

Beispiele:

- $V \longrightarrow W$ K-linear

  $\underline{v} \longmapsto \underline{0}$

- Für jeden UVR $U \subset V$ ist die Inklusion $U \longrightarrow V$

  $\underline{v} \longmapsto \underline{v}$

  K-linear

- $K^n \xrightarrow{\pi_i} K$ K-linear

  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_i$

- $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ K-linear

  $x \longmapsto 3 \cdot x$

  aber $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht

  $x \longmapsto 3x+1$ (denn $0 \not\mapsto 0$)

Viele weitere Beispiele

[F&S, 3.1.2]

$$K^n \xrightarrow{A} K^m \quad K\text{-linear}$$

A $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in K.

Notiz

(1) $\mathrm{id}: V \longrightarrow V$ K-linear (Automorphismus)

(2) $U \underset{K\text{-linear}}{\xrightarrow{G}} V \underset{K\text{-linear}}{\xrightarrow{F}} W$, dann auch $F \circ G$ K-linear (3.1.3)

(3) $F: V \longrightarrow W$ Isomorphismus, dann auch

$V \longleftarrow W : F'$ Isomorphismus.

Beweis zu (3):

zu zeigen: F' K-linear.

Wissen: F^{-1} Gruppenhomomorphismus (7. Vorlesung)

Ferner gilt für $\lambda \in K$, $\underline{w} \in W$:

$$F^{-1}(\lambda \cdot \underline{w}) = F^{-1}(\lambda \cdot F(F^{-1}(\underline{w})))$$

$$\underset{F\ K\text{-linear}}{=} F^{-1}(F(\lambda \cdot F^{-1}(\underline{w})))$$

$$= \lambda \cdot F^{-1}(\underline{w}) \qquad \square$$

Beweis:

$\mathrm{Im}(F) \neq \emptyset$, denn $\underline{0} \in \mathrm{Im}(F)$,

denn $F(\underline{0}) = \underline{0}$.

$\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathrm{Im}(F)$, $\lambda \in K$, dann

$\underline{w}_1 = F(\underline{v}_1)$ für ein $\underline{v}_1 \in V$

$\underline{w}_2 = F(\underline{v}_2)$ " " $\underline{v}_2$ " "

Somit

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2)$$

$$\underset{F\ \text{linear}}{=} F(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \in \mathrm{Im}(F).$$

$$\lambda \cdot \underline{w}_1 = \lambda \cdot F(\underline{v}_1)$$

$$\underset{F\ \text{linear}}{=} F(\lambda \cdot \underline{v}_1) \in \mathrm{Im}(F).$$

$\mathrm{Ker}(F) \neq \emptyset$, denn $\underline{0} \in \mathrm{Ker}(F)$

denn $F(\underline{0}) = \underline{0}$.

[...] $\square$

Beweis:

erste Aussage klar

Injektivitätskriterium:

($\Rightarrow$) $\underline{0} \in \mathrm{Ker}(F)$, denn $F(\underline{0}) = \underline{0}$

$\underline{v} \in \mathrm{Ker}(F)$, $\underbrace{\text{dann } F(\underline{v}) = \underline{0}}$

$\underline{v} = \underline{0}$,

denn F injektiv

($\Leftarrow$) Sei $F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2)$.

Dann $F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = \underline{0}$,

also $F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}$.

Also $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, F$,

also nach Annahme

$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$,

also $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ $\square$

Beweis:

(a) (surj $\Rightarrow$ 2)

Sei $(e_j)_{j\in J}$ Erz.-System von V

Jedes $\underline{w} \in W$ ist von Form

$\underline{w} = F(\underline{v})$ für ein $\underline{v} \in V$

Jedes $\underline{v} \in V$ ist Linearkomb.

$$\underline{v} = \sum_{\text{endlich } j\in J} \lambda_j \underline{e}_j$$

Also

$$\begin{aligned}\underline{w} &= F(\underline{v}) \\ &= F\Big(\sum_{\text{endlich } j\in J} \lambda_j \underline{e}_j\Big) \\ &\underset{F \text{ linear}}{=} \sum_j \lambda_j F(\underline{e}_j) \quad \checkmark\end{aligned}$$

(2 $\Rightarrow$ 1) ✓

(1 $\Rightarrow$ surj.)

Jedes $\underline{w} \in W$ ist von Form

$$\underline{w} = \sum_j \lambda_j F(\underline{b}_j) \underset{F \text{ linear}}{=} F\Big(\sum_j \lambda_j \underline{b}_j\Big)$$

$\in \mathrm{Im}(F)$.

(4) (inj. $\Rightarrow$ ②) [siehe [F&S, 3.2.1]]

Sei $(\underline{u}_j)_{j\in J}$ linear unabh. in V ✓

Sei $\sum_{j \text{ endl.}} \lambda_j F(\underline{u}_j) = \underline{0}$

$$\begin{array}{ccc} \| & F \text{ linear} & \| \\ F\left(\sum_j \lambda_j \underline{u}_j\right) & & F(\underline{0}) \end{array}$$

Da F injektiv:

$$\sum_j \lambda_j \underline{u}_j = \underline{0}$$

Da $(\underline{u}_j)_{j\in J}$ linear unabh., folgt $\lambda_j = 0 \quad \forall j \in J$.

(② $\Rightarrow$ ①)

(① $\Rightarrow$ inj.) Nutze Injektivitäts-Kriterium!

Sei $F(\underline{v}) = \underline{0}$ (z.z. $\underline{v} = \underline{0}$)

$\uparrow$

$$\Vert \quad \underline{v} = \sum_{\text{endl.}} {}_i \ \lambda_i \cdot \underline{b}_i ,$$

also $$F\Big(\sum_{\text{endl.}} {}_i \ \lambda_i \cdot \underline{b}_i\Big) = \underline{0}$$

$$\Vert \quad F \text{ linear}$$

$$\sum_i \lambda_i \, F(\underline{b}_i)$$

Da $(F(\underline{b}_i))_{i \in I}$ linear unabh., folgt $\lambda_i = 0 \ \forall i$, also $\underline{v} = \underline{0}$.

$\square$

$$\operatorname{Ker} F \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2 \supseteq \operatorname{Im} F$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

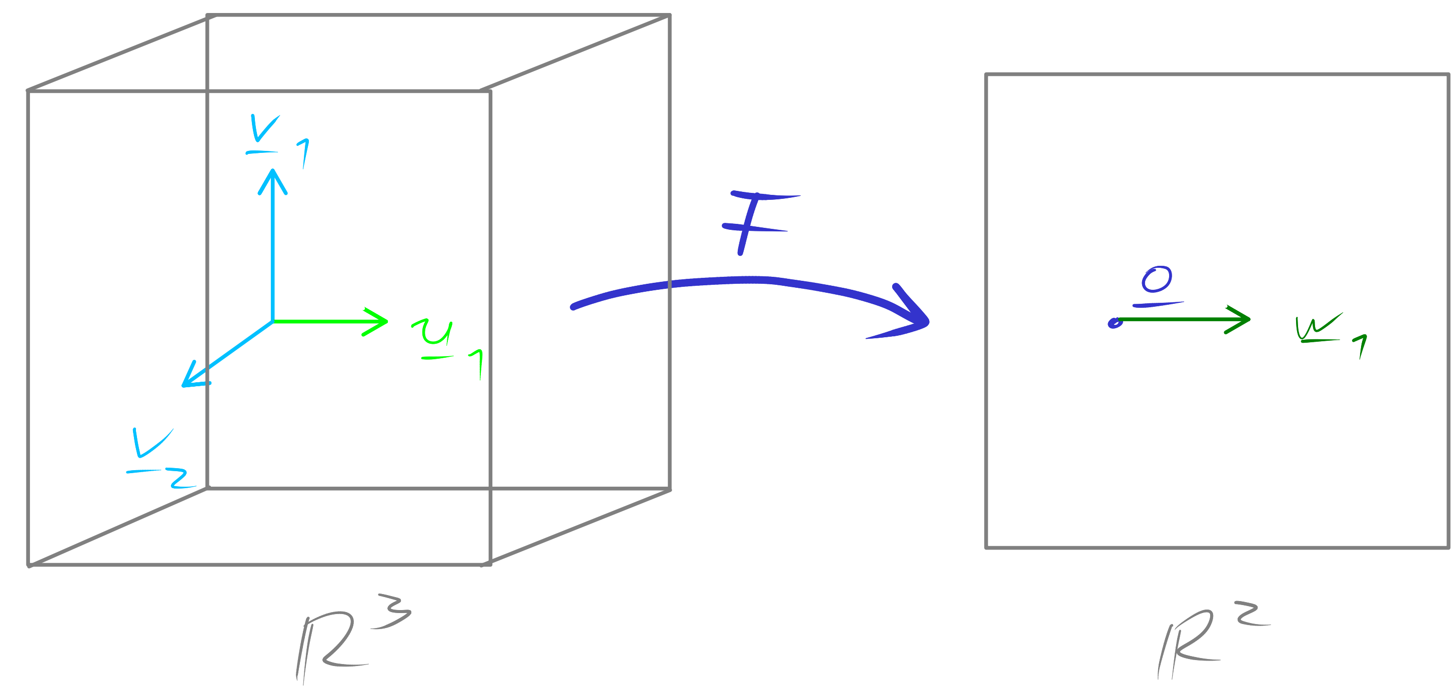
$$\operatorname{Im} F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \underline{0}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \underline{0}$$

$$\operatorname{Ker} F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$



Beweis: $A = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r)$

A Erz-System: Sei $\underline{v} \in V$.

$$F(\underline{v}) = \sum_j \mu_j \underline{w}_j$$
$$= \sum_j \mu_j F(\underline{u}_j)$$
$$= F\left(\sum_j \mu_j \underline{u}_j\right)$$

Also ist

$$F\left(\underline{v} - \sum_j \mu_j \underline{u}_j\right) = \underline{0},$$

d.h. $\underline{v} - \sum_j \mu_j \underline{u}_j \in \operatorname{Ker} F$,

also $\underline{v} - \sum_j \mu_j \underline{u}_j = \sum \lambda_i \cdot \underline{v}_i$

$$\underline{v} = \sum_j \mu_j \underline{u}_j + \sum \lambda_i \cdot \underline{v}_i$$

A linear unabh.

Sei $\sum_j \mu_j \underline{u}_j + \sum \lambda_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$

Wende F an:

$$\sum_j \mu_j \underline{w}_j = \underline{0}$$

Da $(\underline{u}_j)_{j=1,\dots,r}$ linear unabh., folgt

$$\mu_j = 0 \quad \forall j.$$

Also $\sum \lambda_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$

Da $(\underline{v}_i)_{i=1,\dots,k}$ linear unabh., folgt

$$\lambda_i = 0 \quad \forall i$$

$\square$

Vergleiche 5. Vorlesung:

2.1.4 Satz Sind X und Y endliche Mengen mit gleich vielen Elementen, so sind die folgenden Bedingungen an eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ äquivalent:

(i) f injektiv
(ii) f surjektiv
(iii) f bijektiv

Beweis:

Injektivitätskriterium

F injektiv $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} F = \{\underline{0}\} \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} F) = 0$

$\Updownarrow$ Rangformel

$\dim(\operatorname{Im} F) = \dim V$

$\Updownarrow$ $\dim V = \dim W$

F surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} F = W \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} F) = \dim W$

W endlich-dim.

$\square$