Def. (3.1.2) $\underline{V}, W$ K-VR

Eine <u>K-lineare Abbildung</u> / ein <u>K-Vektorraumhomomorphismus</u> ist ein Gruppenhomomorphismus

$$F: (V,+) \longrightarrow (W,+)$$

der zusätzlich $\forall \lambda \in K, \forall \underline{v} \in V$:

$$\boxed{F(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot F(\underline{v})}$$

erfüllt.

Def: (3.1.2) Ein <u>VR-Isomorphismus</u> ist eine bijektive K-lineare Abb.

Zwei K-VR V, W sind <u>isomorph</u> ($V \cong W$), falls ein Isomorphismus $V \to W$ existiert.

<u>VR-Endomorphismus</u>:

K-lineare Abb. $V \longrightarrow V$

<u>VR-Automorphismus</u>:

VR-Isomorphismus $V \to V$.

Def. (3.2.1) $V \xrightarrow{F} W$ K-linear

<u>Bild</u> von F: $\operatorname{Im}(F) := F(V) \subset W$

<u>Kern</u> von F: $\operatorname{Ker}(F) := F^{-1}(\underline{0}) \subset V$

Notiz: (3.2.1) Bild und Kern sind UVR.

Notiz: (3.2.1) $V \xrightarrow{F} W$ K-linear

F surjektiv $\iff$ $\operatorname{Im}(F) = W$

$$\boxed{F \text{ injektiv} \iff \operatorname{Ker}(F) = \{\underline{0}\}}$$

Injektivitätskriterium

Satz: $F: V \longrightarrow W$ K-linear

$(\underline{b}_i)_{i \in I}$ Basis von V

(a) F surjektiv

$\iff (F(\underline{b}_i))_{i \in I}$ Erzeugendensystem 1 von W

$\iff (F(\underline{e}_j))_{j \in J}$ Erzeugendensystem 2 von W

für jedes Erzeugendensystem $(\underline{e}_j)_{j \in J}$ von V

(b) F injektiv

$\Longleftrightarrow (F(b_i))_{i\in I}$ linear unabhängig (1)

$\Longleftrightarrow (F(u_j))_{j\in J}$ linear unabhängig

für jede linear unabh. Familie $(u_j)_{j\in J}$ in V. (2)

(c) F Isomorphismus

$\Longleftrightarrow (F(b_i))_{i\in I}$ Basis von W

$\Longleftrightarrow (F(\tilde{b}_j))_{j\in J}$ Basis von W

für jede Basis $(\tilde{b}_j)_{j\in J}$ von V.

Satz: Rangformel / Dimensionsformel für Abbildungen (3.2.4)

$V \xrightarrow{F} W$ linear, V endlich-dim.

Ist $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$ Basis von $\operatorname{Ker} F$,

$(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_r)$ " " $\operatorname{Im} F$,

so ist für beliebige

$\underline{u}_1 \in F^{-1}(\underline{w}_1), \ldots, \underline{u}_r \in F^{-1}(\underline{w}_r)$

$(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r)$

eine Basis von V. Insbesondere:

$$\boxed{\dim V = \dim(\operatorname{Ker} F) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} F)}_{\text{Rang } F}}$$

Def (3.2.1): $\text{Rang } F := \dim(\operatorname{Im} F)$

Korollar (3.2.4, K3):

Sind V und W endlich-dim. K-VR derselben Dimension so sind die folgenden Bedingungen an eine K-lineare Abbildung $F: V \longrightarrow W$ äquivalent:

(i) F injektiv

(ii) F surjektiv

(iii) F Isomorphismus