z.B. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p prim

<u>Beispiele</u>

(a) $V = K^n$

Sei $\underline{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ Basis von K^n:

Erzeugendensystem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \cdot \underline{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \underline{e}_n \in \operatorname{span}(\{\underline{e}_i \mid i = 1, \ldots, n\})$$

$(x_i \in K)$

Linear unabhängig.

Ang. $\lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$.

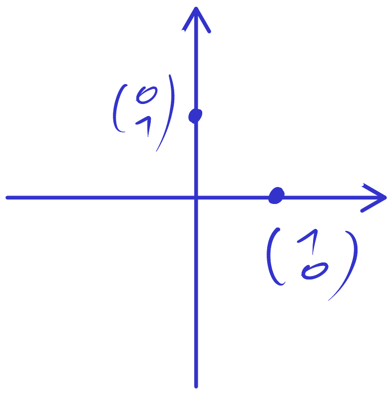
Dann ist $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

d.h. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

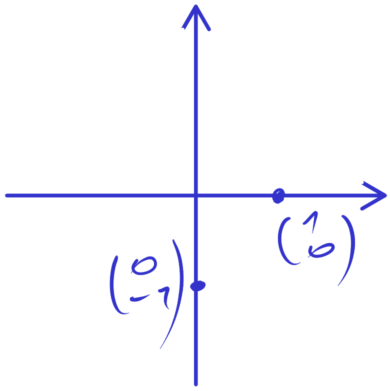
$(e_1, \dots, e_n)$ <u>Standardbasis</u> oder <u>kanonische Basis</u> von K^n.

(b) $V = \mathbb{R}^2$

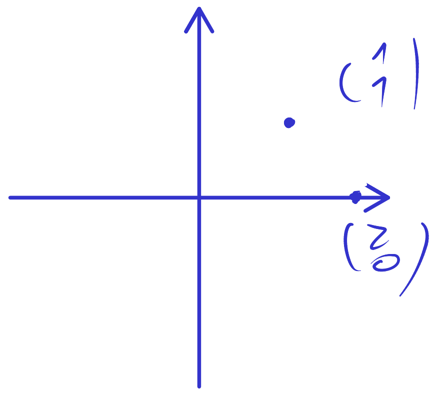
$\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ Basis

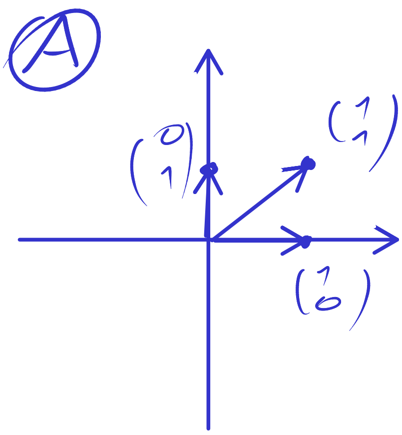


$\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{-1}\right)$ Basis



$\left(\binom{1}{1}, \binom{2}{0}\right)$ Basis

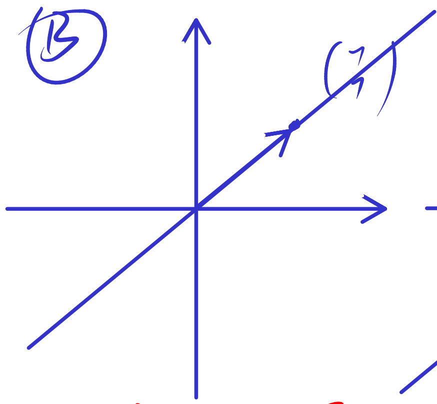




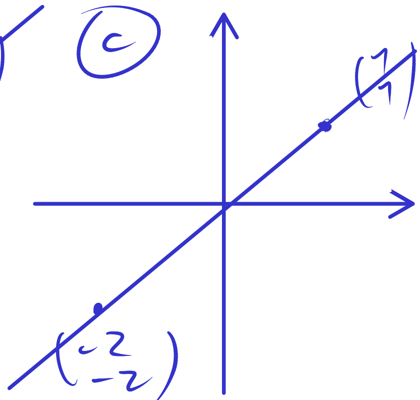
E-System
linear abhängig

$1 \cdot \binom{0}{1} + 1 \cdot \binom{1}{0} - 1 \cdot \binom{1}{1} = \underline{0}$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$



~~E-System~~
linear unabh.



~~E-System~~
linear abhängig

$2 \cdot \binom{1}{1} + 1 \cdot \binom{-2}{-2} = \underline{0}$

(c) $\emptyset$ ist linear unabhängig

$\emptyset$ ist Basis des Nullvektorraums

(d) $(\underline{0})$ ist linear abhängig

$$\Big(\underset{\neq 0}{1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \Big)$$

$(\underline{v})$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist linear unabhängig

$$\left(\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0} \iff \lambda = 0 \text{ oder } \underline{v} = \underline{0} \right)$$

(e) $V = \mathbb{R}[t]$ hat Basis

$$(1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots)$$

E-System:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \operatorname{span}(\{t^i \mid i \in \mathbb{N}\})$$

Linear unabhängig:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i t^i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0$$

Beweis (a) Def. von span( )

$\operatorname{span}(\{v_i\}_{i\in I}) = V$

(b $\Leftarrow$) Angenommen

$$\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i v_i = \underline{0} = \sum_{i\in I} \underbrace{0}_{\lambda_i'} \cdot v_i$$

Dann folgt $\lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$.

(b $\Rightarrow$) Sei $(v_i)_{i\in I}$ linear unabh.

Ang. $\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i v_i = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i' v_i$.

Dann ist

$$\sum_{i\in I} (\lambda_i - \lambda_i') v_i = \underline{0}$$

Es folgt $\lambda_i - \lambda_i' = 0 \quad \forall i \in I$,

also $\lambda_i = \lambda_i' \quad \forall i \in I$.

(c) folgt aus (a) & (b) $\square$

<u>Beweis:</u>

Sei $\lambda \cdot \underline{v} + \sum\limits_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$

Falls $\lambda \neq 0$, multipliziere mit λ^{-1}:

$$\underbrace{\underline{v} = \sum_{i \in I} (-\lambda^{-1} \cdot \lambda_i) \cdot \underline{v}_i}_{\in \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i \in I})} \quad ϟ$$

Also $\lambda = 0$, und somit

$$\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

Da $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabh., folgt nun auch $\lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$ $\square$

Beweis:

$(a \Rightarrow)$ $\operatorname{span}(\{v_i\}_{i \in I}) = V$ ✓

$$\boxed{\text{Ang. } \operatorname{span}(\{v_i\}_{i \in J}) = V \text{ für } J \subsetneq I}$$

Wähle $i \in I \setminus J$.

$$v_i = \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endlich}}} \lambda_j v_j \quad \text{für gewisse } \lambda_j$$

$$\text{also } \quad 1 \cdot v_i + \sum_{j \in J} (-\lambda_j) \cdot v_j = 0$$

$\neq 0$

↯ zu linearen Unabhängigkeit von $(v_i)_{i \in I}$

Also $\operatorname{span}(\{v_i\}_{i \in J}) \neq V$.

$(a \Leftarrow)$ zz: $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabh.

$$\text{Sei } \sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$$

Ang., $\boxed{\exists j: \ \lambda_j \neq 0.}$

$$v_j = -\lambda_j^{-1} \cdot \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i v_i \right)$$

$$= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \left(-\lambda_j^{-1} \cdot \lambda_i\right) \cdot v_i$$

$$\in \operatorname{span}\left(\{v_i\}_{i \in I \setminus \{j\}}\right)$$

Das zeigt

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{span}\left(\{v_i\}_{i \in I}\right) & \subset & \operatorname{span}\left(\{v_i\}_{i \in I \setminus \{j\}}\right) \\ \| & & \cap\!\neq \\ V & & V \end{array} \quad ↯$$

Also folgt: $\lambda_j = 0 \quad \forall j \in I$

(b $\Rightarrow$) $(v_i)_{i \in I}$ linear unabh. ✓

Sei $v \in V$ beliebig.

Da $(v_i)_{i \in I}$ E-System, $\exists \lambda_i$:

$$v = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot v_i,$$

also

$$\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v + \sum (-\lambda_i) v_i = 0,$$

also $(v, v_i)_{i \in I}$ linear abhängig.

(b $\Leftarrow$) zz: $\operatorname{span}\left(\{v_i\}_{i \in I}\right) = V$

Falls nicht,

$\exists \underline{v} \in V \setminus \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i\in I})$

Ergänzungslemma:

Für jedes $\underline{v} \in V \setminus \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i\in I})$ ist auch die um $\underline{v}$ ergänzte Familie $(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I} \in V \times \prod_{i\in I} V$ linear unabhängig.

Also ist $(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabh. ⚡

Also $\operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i\in I}) = V$ $\square$

Insbesondere:

Jede linear unabhängige Familie lässt sich zu einer Basis ergänzen ($\mathcal{E}$: alle Vektoren aus V)

Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis ($\mathcal{U}$: leer)

← U: leer, E: alle Vektoren

Def. (2.5.1) Ein VR ist <u>endlich erzeugt</u>, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Wir werden Basisauswahl- und Ergänzungssatz und Hauptsatz „nur" für diesen Fall beweisen. Allgemeiner Beweis benötigt mehr Mengentheorie.

<u>Beweis</u> zu Basisauswahl und -ergänzung, endlich-erzeugter Fall:

Seien U, E wie im Satz, E endlich.

Konstruiere schrittweise

$$U = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq B_3 \quad \subset \underset{\text{endlich}}{E}$$

mit $(\underline{v}_i)_{i \in B_k}$ linear unabhängig.

SCHRITT 0: $B_0 := U$.

SCHRITT $k+1$: Sei B_k bereits konstruiert.

Falls $(\underline{v}_i)_{i \in B_k}$ Erzeugendensystem.

$B := B_k$ FERTIG.

Falls nicht, $\exists\, \underline{v}_j$ mit $j \in E \setminus B_k$

$$\underline{v}_j \in V \setminus \operatorname{span}(\{\underline{v}_i\}_{i \in B_k}).$$

Nach Ergänzungslemma ist

$$(\underline{v}_j, \underline{v}_i)_{i \in B_k}$$

immer noch linear unabhängig.

Wähle also $B_{k+1} := \{j\} \cup B_k$. $\square$