z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p prim)

Beispiele

Standardraum K^n

$$\underline{u} + \underline{v}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot u_n \end{pmatrix}$$

//

Polynomring $K[t]$

$+$ gewöhnliche Addition von Polynomen $(+_p)$

$$\cdot : K \times K[t] \longrightarrow K[t]$$

$$\left(\lambda, \sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) t^i$$

$$\left(= \lambda \cdot_p \sum a_i t^i\right)$$

konstantes Polynom

$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ist ein $\mathbb{C}$-VR.

$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR

$+$ gewöhnliche Addition $(+_{\mathbb{C}})$

$$\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\lambda, x+iy) \longmapsto \lambda x + i\lambda y$$

$$\left(= \lambda \cdot_{\mathbb{C}} (x+iy)\right)$$

aufgefasst als komplexe Zahl

$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{Q}$-VR

$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-VR

X Menge

$V := \mathrm{Abb}(X, K)$ $\qquad$ K-VR

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

Beweis:

(i) $(\Leftarrow)$

$$\cancel{0 \cdot \underline{v}} = (0+0) \cdot \underline{v}$$

$$= 0 \cdot \underline{v} + \cancel{0 \cdot \underline{v}} \quad \Big| - (0 \cdot \underline{v})$$

$$\underline{0} = 0 \cdot \underline{v}$$

$$\lambda \cdot \underline{0} = \lambda \cdot (\underline{0} + \underline{0})$$

$$\dots \quad \checkmark$$

$(\Rightarrow)$ Sei $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$

Falls $\lambda = 0$ ✓

Falls $\lambda \neq 0$, multipliziere mit λ^{-1}:

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda^{-1} \cdot \underline{0}$$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \underline{v}) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

$$\lambda^{-1} \cdot \underline{0} \overset{\text{s.o.}}{=} \underline{0}$$

(ii)

$$(-1) \cdot \underline{v} + \underline{v} = (-1) \cdot \underline{v} + 1 \cdot \underline{v}$$

$$= (-1+1) \cdot \underline{v}$$

$$= 0 \cdot \underline{v}$$

$$\overset{(i)}{=} \underline{0}$$

$$(-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$$

$\square$

Beweis:

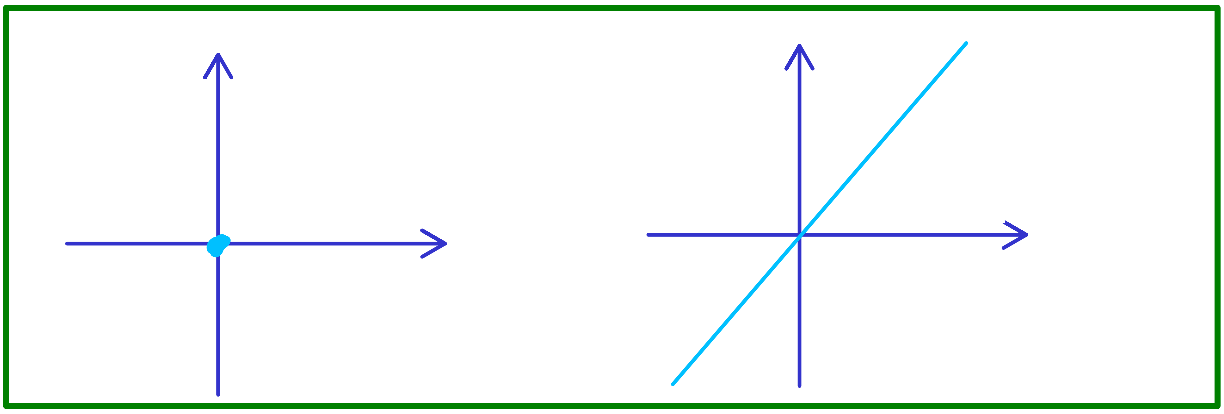
Wegen (3): $\underbrace{-\underline{w}}_{(-1)\cdot\underline{w}} \in W \quad \forall\, \underline{w} \in W$

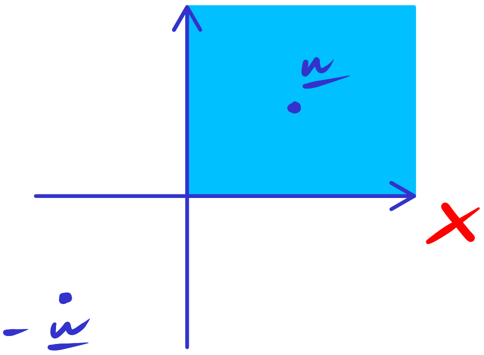
Daher ($\underline{0} \in W$ und somit) W Untergruppe von $(V, +)$.

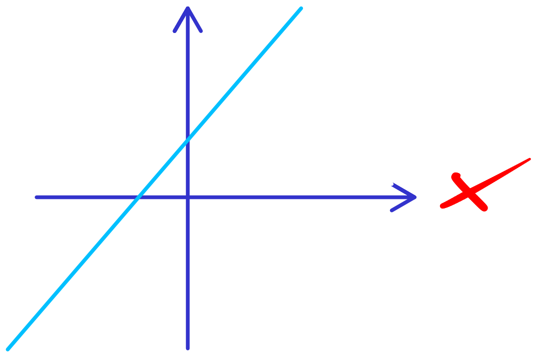
$$\left.\begin{aligned}
\lambda\cdot(\underline{u}+\underline{v}) &= (\lambda\cdot\underline{u}) + (\lambda\cdot\underline{v}) \\
(\lambda+\mu)\cdot\underline{u} &= (\lambda\cdot\underline{u}) + (\mu\cdot\underline{u}) \\
(\lambda\cdot\mu)\cdot\underline{u} &= \lambda\cdot(\mu\cdot\underline{u}) \\
1\cdot\underline{u} &= \underline{u}
\end{aligned}\right\}\ \text{geerbt von } V$$

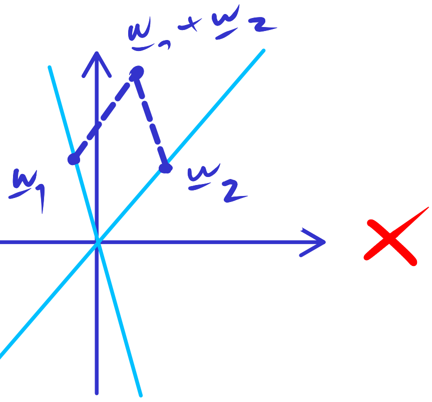
$\square$

$W \subset \mathbb{R}^2$









$$K[t]_{\le d} := \{ f \in K[t] \mid \deg(f) \le d \}$$

✓ $(d \geq 0)$

$$K[t]_{\geq 1} := \{ f \in K[t] \mid \deg(f) \geq 1 \}$$

0

✗

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$$\mathcal{C}^0(I) := \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

ist $\mathbb{R}$-UVR von $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$

Konstruktionen mit UVR

Satz (2.4.3) Der Schnitt beliebig vieler K-UVR ist wieder ein K-UVR.

Beweis: Seien $W_i \subset V$ K-UVR $(i \in I)$

(1) $\bigcap_{i\in I} W_i \neq \emptyset$, denn

$\forall i \in I: \ \underline{0} \in W_i$,

also $\underline{0} \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

(2) Seien $\underline{w}, \underline{w}' \in \bigcap_{i\in I} W_i$.

Dann gilt $\forall i \in I: \underline{w} \in W_i$ und $\underline{w}' \in W_i$.

Da W_i UVR:

$\forall i \in I: \ \underline{w} + \underline{w}' \in W_i$, also $\quad \underline{w} + \underline{w}' \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

(3) Sei $\lambda \in K$, $\underline{w} \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

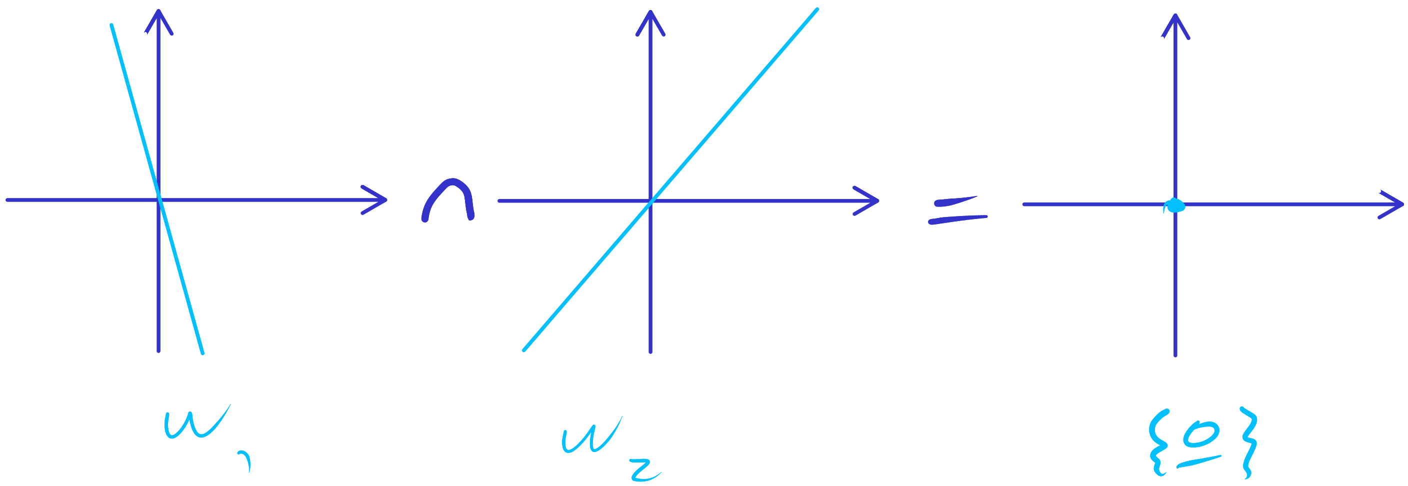
$\forall i \in I: \ \underline{w} \in W_i$,

da W_i K-UVR:

$\forall i \in I: \ \lambda \cdot \underline{w} \in W_i$,

also $\quad \lambda \cdot \underline{w} \in \bigcap_{i \in I} W_i$

$\square$



Beweis:

(1) $\underline{0} \in \operatorname{span}(M)$

$\operatorname{span}(M)$ abgeschlossen unter $+$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{\underline{v}_i}_{\in M} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' \cdot \underbrace{\underline{v}_i'}_{\in M} \in \operatorname{span}(M)$$

$\operatorname{span}(M)$ abgeschlossen unter $\cdot$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot (\lambda_i \cdot \underline{v}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot \lambda_i) \cdot \underline{v}_i$$

$\in \operatorname{span}(M)$

(2) W UVR mit $M \subset W$,

dann auch $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underline{v}_i \in W$

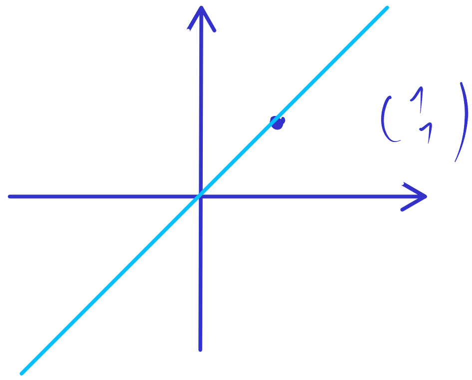
für alle $\underline{v}_i \in M$ $\square$

Beispiel:

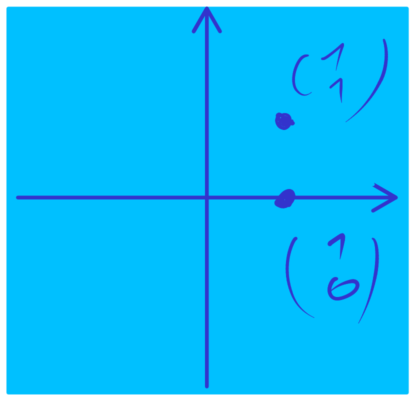
V beliebig $\operatorname{span}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$

$V = \mathbb{R}^2$

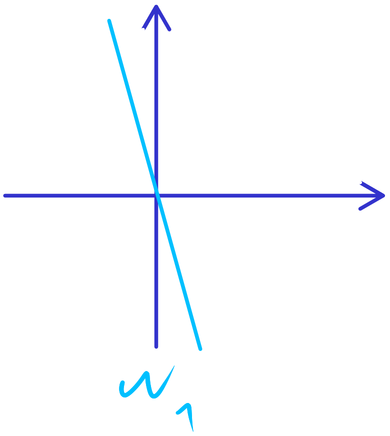
$\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\right) =$



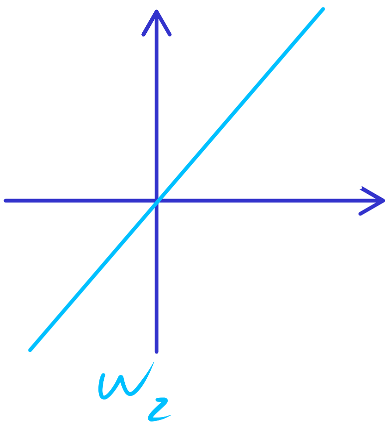
$\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right) =$



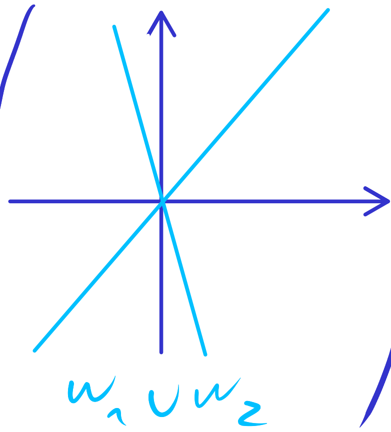
Beispiel:



$+$



$= \operatorname{span}\Big($



$\Big)$

$=$