$(K, +, \cdot)$ Körper

Def (2.4.1) Ein Vektorraum über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung

$$\bullet : K \times V \longrightarrow V,$$

sodass für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ gilt:

$$\lambda \bullet (\underline{u} + \underline{v}) = (\lambda \bullet \underline{u}) + (\lambda \bullet \underline{v})$$

$$\boxed{(\lambda + \mu) \bullet \underline{u} = (\lambda \bullet \underline{u}) + (\mu \bullet \underline{u})}$$

$$(\lambda \cdot \mu) \bullet \underline{u} = \lambda \bullet (\mu \bullet \underline{u})$$

$$1 \bullet \underline{u} = \underline{u}$$

Elemente von V: Vektoren

Null von V: Nullvektor $\underline{0}$

Elemente von K: Skalare

$\bullet : K \times V \longrightarrow V$: Skalarmultiplikation

Notiz (2.4.7) In jedem K-VR gilt:

(i) $\lambda \bullet \underline{v} = \underline{0} \iff (\lambda = 0$ oder $\underline{v} = \underline{0})$

(ii) $(-1) \bullet \underline{v} = -\underline{v}$

Def (2.4.2) $\quad (V, +, \cdot)$ K-VR

Ein K-Untervektorraum (K-UVR) von V ist eine Teilmenge W, für die gilt:

(1) $W \neq \emptyset$

(2) W abgeschlossen unter $+$:

$\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W: \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$

(3) W abgeschlossen unter $\cdot$:

$\forall \lambda \in K, \underline{w} \in W: \quad \lambda \cdot \underline{w} \in W$

Satz (2.4.3)

Zusammen mit den eingeschränkten (induzierten) Abb.

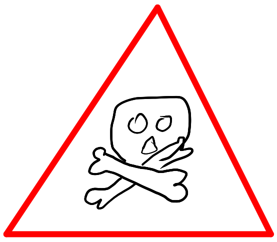
$$+ : W \times W \longrightarrow W$$
$$\cdot : K \times W \longrightarrow W$$

ist jeder UVR selbst ein K-VR.

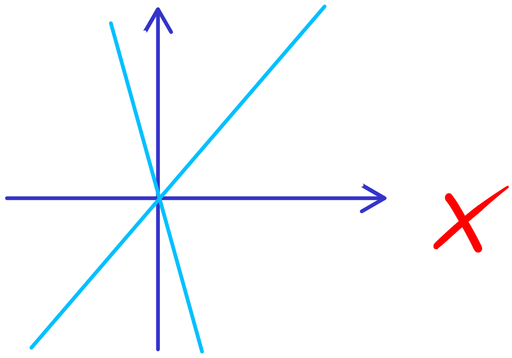
(insbesondere enthält jeder UVR $\underline{0}$)

Konstruktionen mit UVR

Satz (2.4.3) Der Schnitt beliebig vieler K-UVR ist wieder ein K-UVR.



Vereinigung von UVR ist i.A. kein UVR.



Stattdessen: Summe (s.u.)

Def (2.4.4) Eine Linearkombination von Vektoren in V ist eine endliche Summe der Form

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underline{v}_i =\right) \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$$

(mit $\lambda_i \in K$, $\underline{v}_i \in V$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{0} := \underline{0}$$

Def (2.4.4) $M \subset V$ Teilmenge

Die <u>lineare Hülle von M</u> / der <u>von M aufgespannte K-UVR</u> ist die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M:

$$\operatorname{span}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underline{v}_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, \underline{v}_i \in M \right\}$$

Satz (2.4.4)

span(M) ist der kleinste UVR von V, der M enthält. D.h.:

(1) span(M) ist ein UVR

(2) $M \subset W \subset V$ für UVR W

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{span}(M) \subset W.$$

Def Die <u>(interne) Summe</u> von UVR $W_i \subset V$ $(i \in I)$ ist der UVR

$$\sum_{i \in I} W_i := \operatorname{span}\Big(\bigcup_{i \in I} W_i \Big)$$