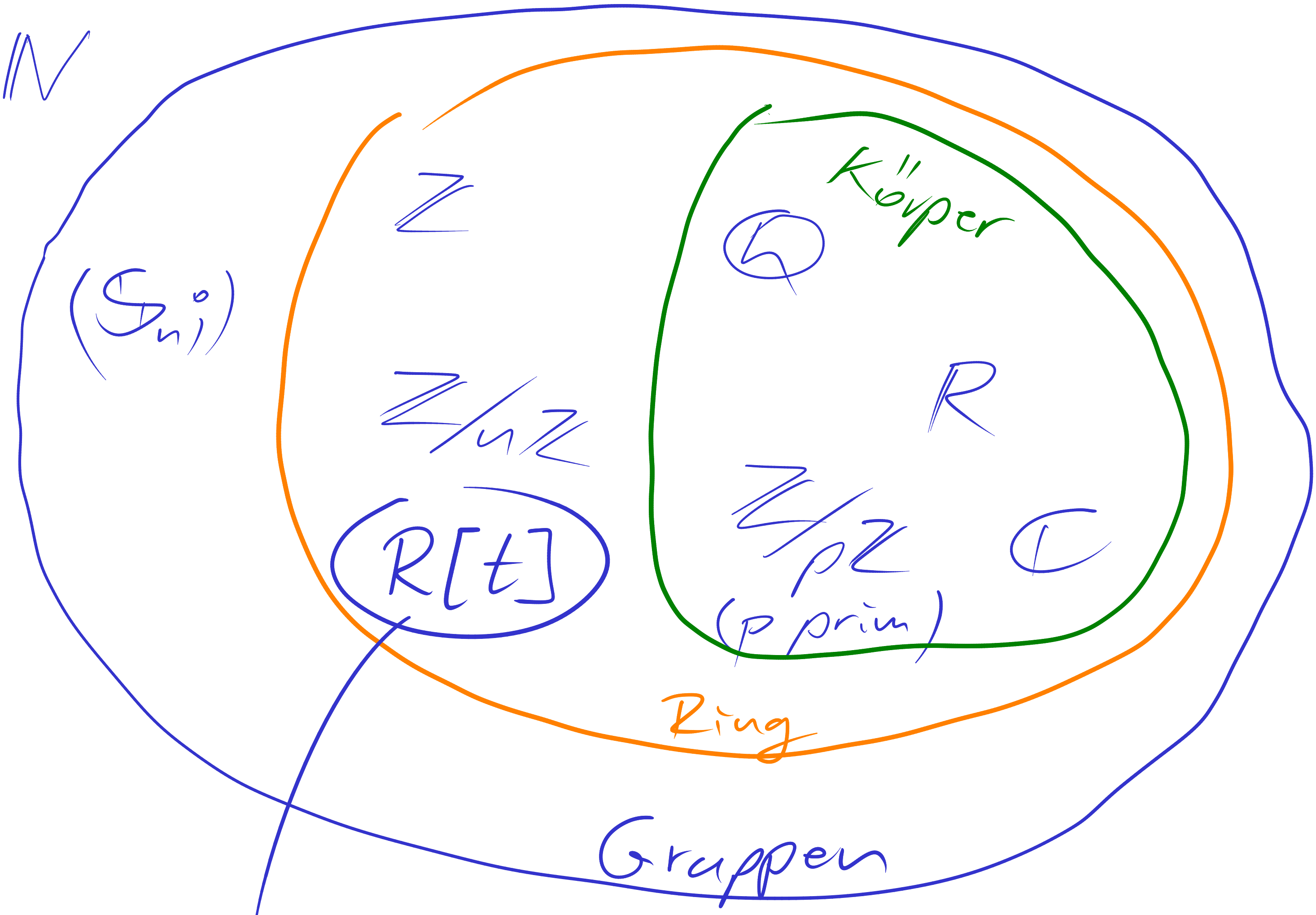

Polynomring

$R = \mathbb{Z}$

R Körper

$$\boxed{[2]t^i \cdot_P [2]t^j = 0 \cdot t^{i+j}}$$

$a_i = 1$

$a_k = 0$ für $k \neq i$

$b_j = 1$

$R = \mathbb{Z}/4$

$[2] \cdot [2] = 0$

$f = 3 + 2t^2 + 0 \cdot t^6$ $\deg(f) = 2$

$g = t - 5t^2$ $\deg(g) = 2$

$f +_P g = 3 + t - 3t^2$

$f \cdot_P g = (3 + 2t^2) \cdot (t - 5t^2)$

$= 3t - 15t^2 + 2t^3 - 10t^4$

Beweis: Nachrechnen ...

$0_P := 0_R$ $(a_i = 0_R \quad \forall i)$

$-_P\left(\sum_i a_i t^i\right) := \sum_i \underbrace{(-a_i)}_{\text{in } R} t^i$

$1_P := 1_R$ $\left(\begin{array}{l} a_0 = 1_R \\ a_i = 0 \quad \forall i \geq 1 \end{array}\right)$

...

$\square$

Beweis: Betrachte Koeffizienten c_k von $f \cdot g$

$c_{n+m} = \sum_{\substack{i,j: \\ i+j=n+m}} a_i \cdot b_j = a_n \cdot b_m \neq 0$

und $c_k = 0$ für $k > n+m$.

$\square$

Bsp:

① K Körper, $K^\times = K \setminus \{0\}$

② $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

③ R nullteilerfrei komm. Ring mit Eins, $1 \neq 0$

$$(R[t])^\times \cong R^\times$$ (konstante invertierbare Polynome)

$$f \cdot f' = 1$$

$$\underbrace{\deg(f)}_{\geq 0} + \underbrace{\deg(f')}_{\geq 0} = \underbrace{\deg(1)}_{0}$$

Beweis:

Eindeutigkeit:

Sei $f = q \cdot g + r$, $\deg(r) < \deg(g)$

$= \tilde{q} \cdot g + \tilde{r}$, $\deg(\tilde{r}) < \deg(g)$

Dann ist

$$\boxed{(\tilde{q} - q)\, g = r - \tilde{r} \text{ von Grad} < \deg(g)}$$

Angenommen $\tilde{q} - q \neq 0$. Dann gilt andererseits laut Gradformel:

$$\deg\Big(\underbrace{(\tilde{q} - q)}_{a_n \neq 0} \cdot \underbrace{g}_{b_m \in R^\times}\Big) = \underbrace{\deg(\tilde{q} - q)}_{\geq 0} + \deg(g)$$

$$\underbrace{a_n \neq 0 \quad b_m \in R^\times}_{a_n \cdot b_m \neq 0}$$

(Wäre $a_n \cdot b_m = 0$, dann $\underbrace{a_n \cdot b_m \cdot b_m^{-1}}_{a_n} = 0$)

also $\boxed{\deg((\tilde{q} - q) \cdot g) > \deg(g)}$ ↯

Also $\tilde{q} - q = 0$, d.h. $\tilde{q} = q$.

$q \cdot g + r$
$= \tilde{q} \cdot g + \tilde{r}$

Es folgt: $\tilde{r} = r$.

Existenz:

Konstruiere schrittweise endlich viele Polynome

$q_0, q_1, q_2, \dots$

$r_0, r_1, r_2, \dots$

derart, dass jeweils gilt

$$f = (q_0 + q_1 + \dots + q_i) \cdot g + r_i$$

$+q_{i+1}$

und $\deg(r_{i+1}) < \deg(r_i)$.

SCHRITT 0: $q_0 := 0$

$r_0 := f$

SCHRITT $i+1$: Seien $q_0, \dots, q_i$

$r_0, \dots, r_i$

bereits konstruiert.

Falls $\deg(r_i) < \deg(g)$ — FERTIG.

$q := q_0 + \dots + q_i$,

$r := r_i$

Falls $\deg(r_i) \geq \deg(g)$: der höchste Term

Def. q_{i+1} so, dass $q_{i+1} \cdot g$ der höchste Term von r_i ist.

$$g = \boxed{b_m \cdot t^m + \text{kleinere Terme}}$$

$$r_i = \underset{\neq 0}{a_n} \cdot t^n + \text{Kleinere Terme}$$

mit $n \geq m$

$$q_{i+1} := \boxed{a_n \cdot b_m^{-1} \cdot t^{n-m}}$$

$$r_{i+1} := r_i - q_{i+1} \cdot g$$

Dann ist

$$q_{i+1} \cdot g = a_n \cdot t^n + \text{kleinere Terme},$$

daher $\deg(r_{i+1}) < \deg(r_i)$. $\square$

Beispiel:

$f = 3t^3 + 2t + 1$ in $\mathbb{Z}[t]$

$g = t^2 - 4t$

$$(3t^3 + 2t + 1) : (t^2 - 4t) = \underbrace{3t + 12}_{q}$$

$$\begin{array}{l} -(3t^3 - 12t^2) \\ \hline 12t^2 + 2t + 1 \\ -(12t^2 - 48t \quad) \end{array}$$

$$\underbrace{50t+1}_{r}$$

$$\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$$

$\mathbb{R}[t]^\times =$ konstante Polynome a_0

mit $a_0 \neq 0$

Insbesondere: je zwei teilerfremde ganze Zahlen lassen sich linear zu 1 kombinieren,

z.B. $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$:

$$1 = x \cdot 19 + y \cdot 7$$

$$19 = 2\cdot 7 + 5$$
$$7 = 1\cdot 5 + 2$$
$$5 = 2\cdot 2 + 1 \quad ggT(19,7)$$
$$2 = 2\cdot 1 + 0$$

$\underline{i=0}$ $$19 = 1\cdot 19 + 0\cdot 7$$
$\underline{i=1}$ $$7 = 0\cdot 19 + 1\cdot 7$$
$\underline{i=2}$ $$5 = 19 - 2\cdot 7$$
$\underline{i=3}$ $$2 = 7 - 1\cdot \underline{\underline{5}}$$
$$= 7 - (19 - 2\cdot 7)$$
$$= 3\cdot 7 - 19$$

$$1 = \underline{\underline{5}} - 2\cdot \underline{\underline{2}}$$
$$= (19 - 2\cdot 7)$$
$$- 2\cdot (3\cdot 7 - 19)$$
$$= \underset{x}{3}\cdot 19 - \underset{y}{8}\cdot 7$$