$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x * y := x^2 - y^3 + \frac{x-y}{5}$$

$$* : \{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$

$$(0,0) \longmapsto 0$$
$$(0,1) \longmapsto 0$$
$$(1,0) \longmapsto 1$$
$$(1,1) \longmapsto 0$$

$$\mathrm{Abb}(X,X) \times \mathrm{Abb}(X,X) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X,X)$$

$$(f, g) \qquad f \circ g$$

//

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

(abelsch)

(Ass.) ✓

(n.E.) $0 + a = a$ ✓

(Inv.) $(-a) + a = 0$ ✓

(Komm.) ✓

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(Ass.) ✓

(n.E.) $1 \cdot a = a$

~~(Inv.)~~ $a' \cdot a = 1$

$\nexists 0' : 0' \cdot 0 = 1$

$$\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\cdot : \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times$ (Inv.) $a' := \frac{1}{a}$

(abelsch)

X Mengen

$$\circ : \mathrm{Abb}(X,X) \times \mathrm{Abb}(X,X) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X,X)$$
$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

(Ass.) ✓

(n.E.) $e = id_X$

$id_X \circ f = f$

~~(Inv.)~~ $f^{-1} \circ f = id_X$

<u>Beweis</u>: $\circ : S(X) \times S(X) \longrightarrow S(X)$
$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

Ist wohldefiniert:

$f \in S(X)$ and $g \in S(X)$ dann auch $f \circ g \in S(X)$. [...]

(Ass.) ✓

(n.E): $id_X \in S(X)$

(Inv.): $f' := f^{-1}$

$\square$

$$\mathfrak{S}_3 \ni \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

⚠ $\mathfrak{S}_3$ ist nicht abelsch.

Beweis:

i) $a * a' = e$

Wissen: $\exists\, (a')' :\quad (a')' * a' = e$

Daher:

$$
\begin{aligned}
a * a' &= e * a * a' \\
&= (a')' * \underbrace{a' * a}\, * a' \\
&= (a')' * \underbrace{e * a'} \\
&= (a')' * a' \\
&= e \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

ii) $a * e = a$

$$
\begin{aligned}
a * e &\overset{(\text{Inv.})}{=} a * \underbrace{a' * a}_{(i)} \\
&= e * a \\
&\overset{(\text{n.E.})}{=} a \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

iii) e eindeutig: Sei $\tilde{e}$ weiteres neutrales Element:

$\forall a \in G$: $e * a = a$ | Wegen (ii): $a * e = a$

$\tilde{e} * a = a$ | $a * \tilde{e} = a$

$a = \tilde{e}$ $\qquad$ $a = e$

$$\underbrace{e * \tilde{e} = \tilde{e} \qquad e * \tilde{e} = e}_{\tilde{e} = e}$$

(iv) <u>a' eindeutig</u> Sei $a^{\#}$ weiteres Inverses von a.

$a' * a = e$ | Wegen (i): $a * a' = e$

$a^{\#} * a = e$ | $a * a^{\#} = e$

$$a' * a = a^{\#} * a \quad /$$

daher $\underbrace{a' * a * a'}_{} = a^{\#} * \underbrace{a * a'}_{}$

$$\underbrace{a' * e}_{} = \underbrace{a^{\#} * e}_{}$$

Wegen ii) $a' = a^{\#}$

(v) $\underline{(a')' = a}$

$$\left.\begin{array}{ll} (a')' * a' = e & (\text{Inv.}) \\ a * a' = e & (i) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (a')' = a \\ \text{wegen } (iv). \end{array}$$

(vi) $\underline{(a*b)' = b' * a'}$

$$\left.\begin{array}{ll} (a*b)' * a * b = e & (\text{Inv.}) \\ (b' * \underbrace{a') * a}_{} * b & \\ = b' * e * b & \\ = b' * b \qquad\qquad = e & \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{wegen } (iv) \\ (a*b)' \\ \| \\ b' * a' \end{array} \quad \square$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \text{in } (G,\cdot): & \text{in } (G,+) \\ a\cdot 1 = 1\cdot a = a & a + 0 = 0 + a = a \\ a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1 & a - a = -a + a = 0 \\ (a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1} & \left(-(a+b) = -b - a\right) \end{array}}$$