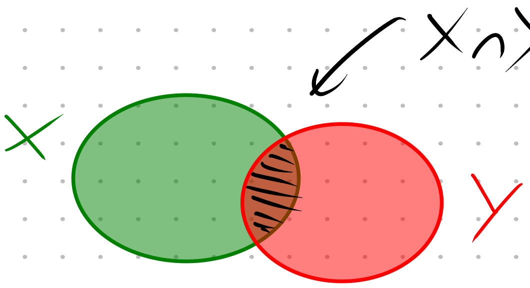
$\emptyset := \{\}$ leere Menge

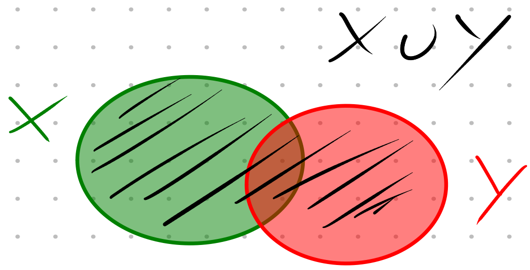
$$M := \{1, 2, 3\}$$
$$= \{3, 1, 2\}$$
$$= \{1, 1, 3, 2, 3, 1\}$$

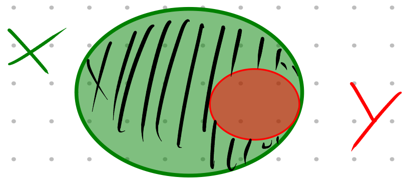
$1 \in M$, $2 \in M$, $3 \in M$, $4 \notin M$

$$\emptyset \subset M$$
$$\{1, 2\} \subset M$$
$$M = \{1, 2, 3\} \subset M$$

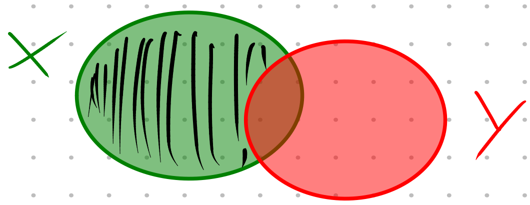
$$\boxed{\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}} = \underline{v} + \mathbb{R}\underline{w}$$
$$\supset$$
$$\subset$$







$X \setminus Y$



$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$z \longmapsto z^2$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$-1 \longmapsto 1$$

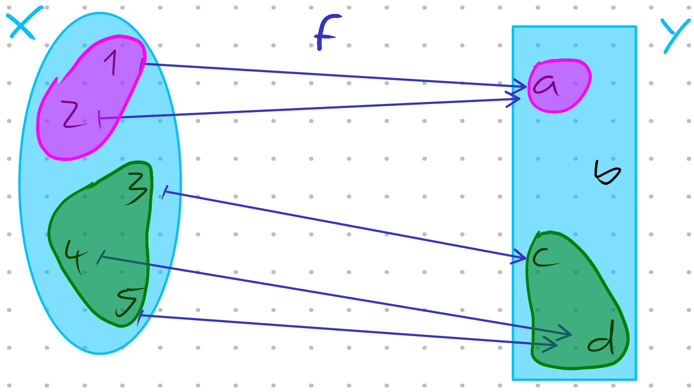
$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$z \longmapsto z^2$$

$$\cancel{h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}}$$
$$\cancel{z \longmapsto z^2}$$
$$\cancel{1/2 \longmapsto 1/4}$$
$$\cancel{\pi \longmapsto \pi^2}$$

i. A. $h(z) \notin \mathbb{Z}$

$$\cancel{i: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}}$$
$$\cancel{\frac{p}{q} \longmapsto p}$$
$$\cancel{1 = \frac{1}{1} \longmapsto 1}$$
$$\cancel{\frac{2}{2} \longmapsto 2}$$

„h und i sind nicht wohldefiniert“

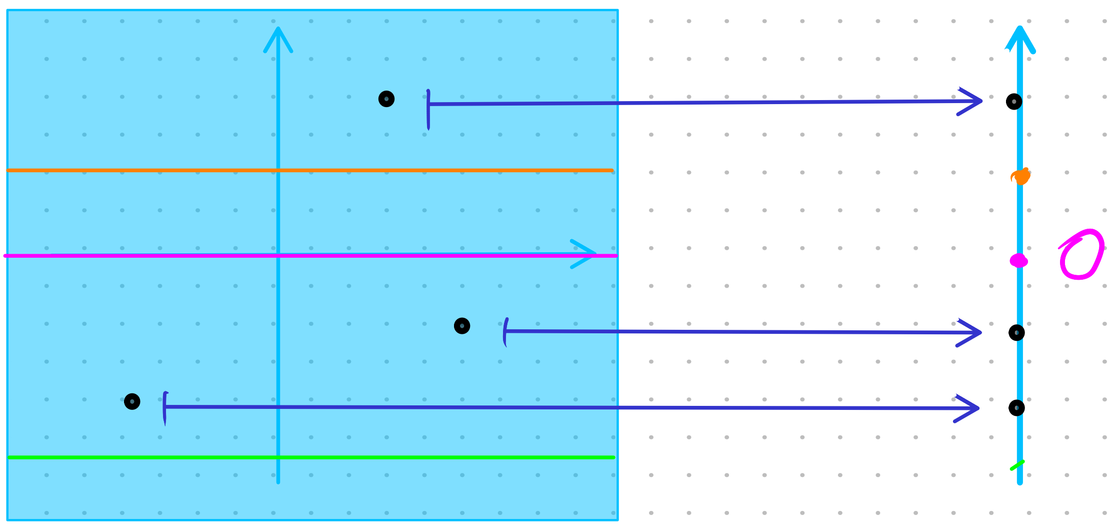


$$f(\{3,4,5\}) = \{c,d\}$$

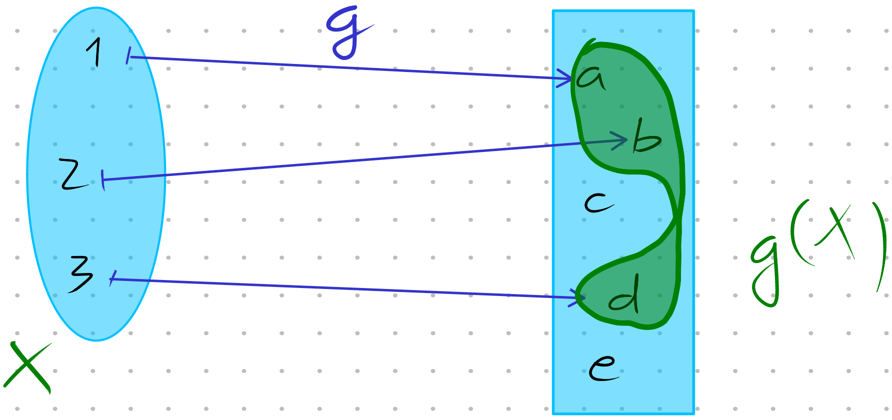
$$f^{-1}(b) = \emptyset$$

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(\{a\}) = \{1,2\}$$

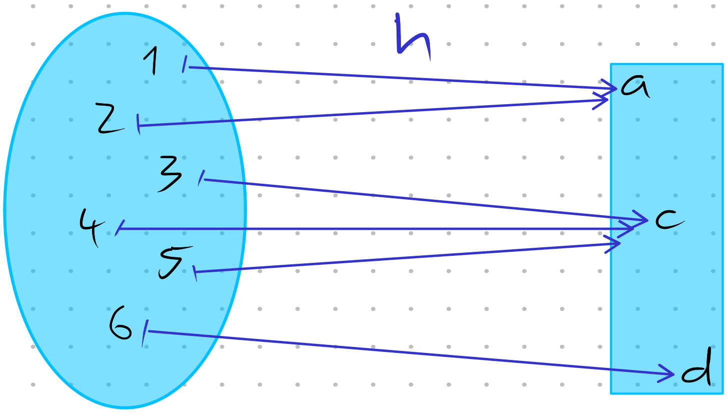
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto y \end{aligned}$$



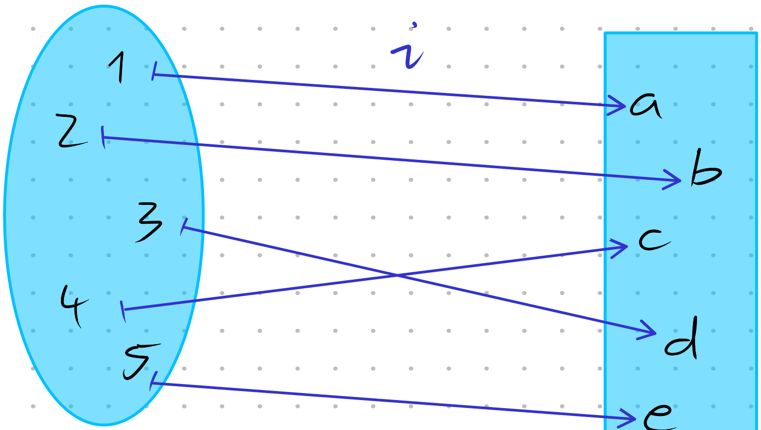
$$f^{-1}(0) = x\text{-Achse}$$



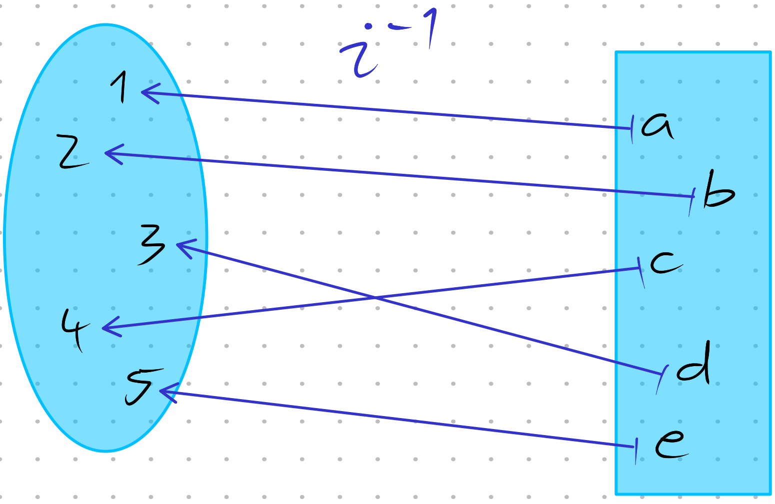
injektiv



surjektiv



bijektiv



(Umkehr-abb. von i)

Beweis

f injektiv $\Leftrightarrow$ $f(X)$ hat genauso viele Elemente wie X

f surjektiv $\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

$\Leftrightarrow$ $f(X)$ hat genauso viele Elemente wie Y

Y endlich

$\square$

Beweis

Quelle ✓

Ziel ✓

$\forall x \in X: \ (h \circ (g \circ f))(x)$

$= h((g \circ f)(x))$

$= h(g(f(x)))$

$= (h \circ g)(f(x))$

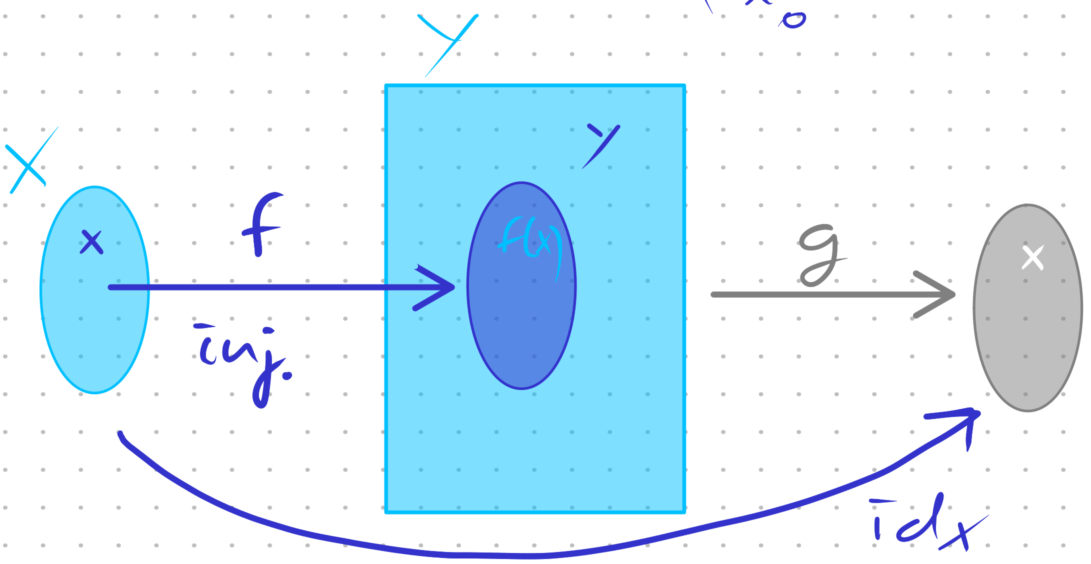
$= ((h \circ g) \circ f)(x)$ $\square$

$$\emptyset \longrightarrow Y$$
$$\cancel{\overset{\exists g}{\longleftarrow}}$$

Beweis

(1, $\Rightarrow$) Falls f injektiv und $X \neq \emptyset$ wähle ein beliebiges Element $x_0 \in X$.

$$g: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto \begin{cases} x & \text{falls es } x \in X \text{ gibt mit } f(x) = y \\ x_0 & \end{cases}$$



Dann ist $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$.

(1, $\Leftarrow$) Für leeres X ist jede Abb. $X \longrightarrow Y$ injektiv.

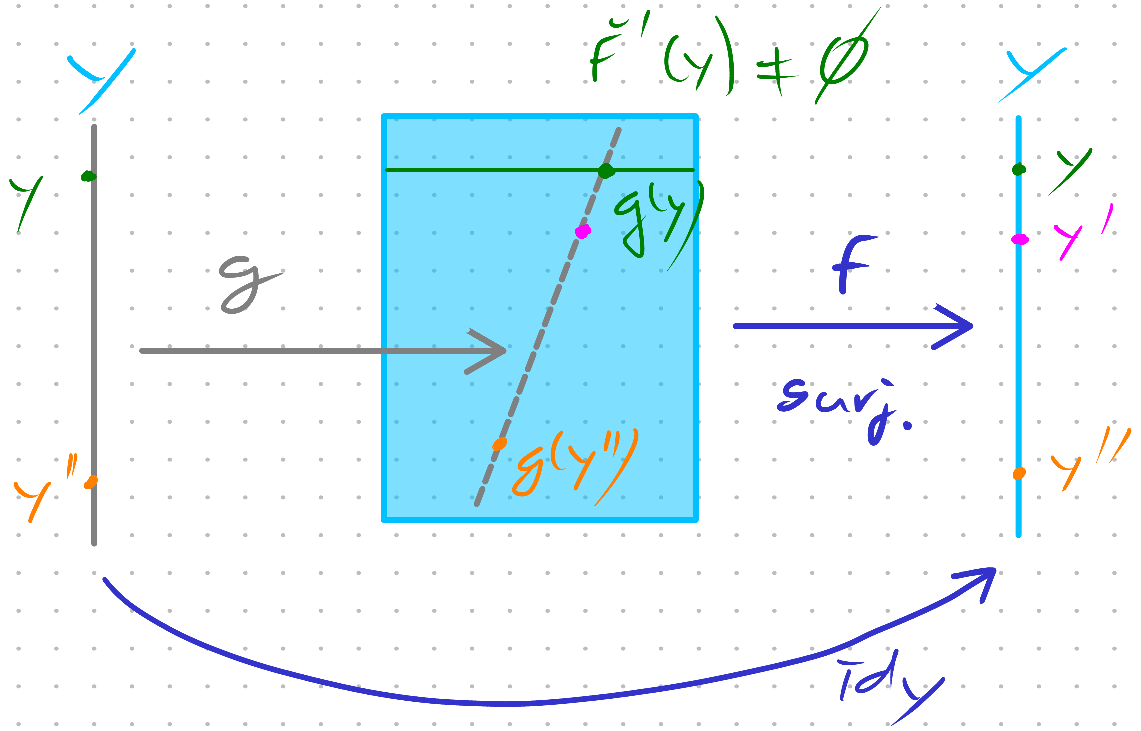
Existiert g mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so folgt aus

$$f(x) = f(x')$$

$$\begin{array}{ccc} g(f(x)) & = & g(f(x')) \\ \| & & \| \\ \mathrm{id}_X(x) & & \mathrm{id}_X(x') \\ \| & & \| \\ x & & x' \end{array}$$

also $x = x'$.

(2, $\Rightarrow$)



Ist f surjektiv, so wähle aus jeder Faser $f^{-1}(y)$ ein Element. Nenne dieses Element $g(y)$.

Das def. $g: Y \longrightarrow X$
mit $f(g(y)) = y$.

(2, ⇐) Ist g mit $f \circ g = id_Y$ gegeben, so ist für jedes $y \in Y$ das Element $g(y)$ ein Urbild von y unter f $(f(g(y)) = y)$.

(3, ⇒) Ist f bijektiv, erfüllt $g := f^{-1}$ die Forderungen.

(3, ⇐) Existiert g wie angegeben, so ist f bijektiv nach (1) & (2). Ferner ist

$$f^{-1}(y) = \text{das eindeutige } x \in X, \text{ für das gilt } f(x) = y$$

Für dieses x gilt dann
$x = g(f(x)) = g(y)$,

also $\bar{f}' = g$. $\square$