$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Vert.)}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{(Add.)}}{\overset{(-2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ -3 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{(Skalarm.)}}{\overset{\cdot \frac{1}{5}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2/5 & 7/5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>:

(Vert.) ✓

(Skalarm.) Nur eine Zeile i betroffen. Reicht zu zeigen:

Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

genau dann, wenn

$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i$$

($\Downarrow$) multipliziere mit λ

($\Uparrow$) teile durch λ – möglich, da $\lambda \neq 0$.

(Add.) 2 Zeilen betroffen, Zeilen i & j $(i \neq j)$

Reicht zu zeigen:

Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt:

(I) $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

(II) $\quad a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$

genau dann, wenn

(I) $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + \dots\dots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i$$

(II + λI)

($\Downarrow$) Erfüllt $\underline{x}$ (I), dann auch ($\lambda \cdot$ I).
Erfüllt $\underline{x}$ (I) und (II), dann auch ($\lambda \cdot$ I) und (II), also auch (II + λ I).

($\Uparrow$) Erfüllt $\underline{x}$ (I) und (II + λ I), dann auch ($-\lambda$ I) und (II + λ I), also auch $(\underbrace{-\lambda I} + II + \underbrace{\lambda I}) = (II)$ $\square$

Runde 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$j=2$

$a = a_{22} = 3$

(Vert.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

"A'"

Runde 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

$j=3$

$a = 1$

(Add.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Runde 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$a = 9$

Vert.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Add.)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
-2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\
-2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

EZU

$$
(A, \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right) \; (-2)
$$

$$
(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

Auflösen

Da dieser Eintrag $\neq 0$ ist, folgt:

$$
\text{Lös}(A, \underline{b}) = \emptyset
$$

E zu

$$(A, \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \; (-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; (-1/3)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $\boxed{\begin{array}{l} x_2 = \lambda_1 \\ x_4 = \lambda_2 \end{array}}$ $\begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{R} \end{array}$

(Zeile 2): $x_3 + \frac{1}{3}\lambda_2 = 1$ also

$$\boxed{x_3 = 1 - \frac{1}{3}\lambda_2}$$

(Zeile 1): $x_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{6}\lambda_2 = \frac{1}{2}$, also

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2}$$