$L = \underline{v} + \mathbb{R} \cdot \underline{w}$ in $\mathbb{R}^n$

$\underline{w} \neq \underline{0}$

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}$ in $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

1.3.2 Def

Eine Ebene in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft:

Es gibt $\underline{v}, \underline{w}, \underline{w}' \in \mathbb{R}^n$ mit

$\underline{w} \neq \underline{0}$

und $\underline{w}' \neq \underline{0}$

und für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$: $\underline{w} \neq \alpha \cdot \underline{w}'$

$\underline{w}$ und $\underline{w}'$ sind linear unabhängig

sodass gilt:

$$E = \underline{v} + \mathbb{R} \cdot \underline{w} + \mathbb{R} \cdot \underline{w}'$$

$$:= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{es gibt } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ s.d.} \\ \underline{x} = \underline{v} + \lambda \cdot \underline{w} + \mu \cdot \underline{w}' \end{array} \right\}$$

1.3.2 Satz:

Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Ebene, genau dann wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ gibt, sodass gilt:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$$

($\Rightarrow$) $\underline{v}, \underline{w}, \underline{w}'$ gegeben.

a_1, a_2, a_3, b ?

$$\underline{v} \in E: \quad a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = b$$

$$\underline{v}+\underline{w} \in E: \quad a_1(v_1+w_1) + a_2(v_2+w_2) + a_3(v_3+w_3) = b$$

$$\underline{v}+\underline{w}' \in E: \quad a_1(v_1+w_1') + a_2(v_2+w_2') + a_3(v_3+w_3') = b$$

//

$$a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = 0$$

$$a_1w_1' + a_2w_2' + a_3w_3' = 0$$

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = b$$

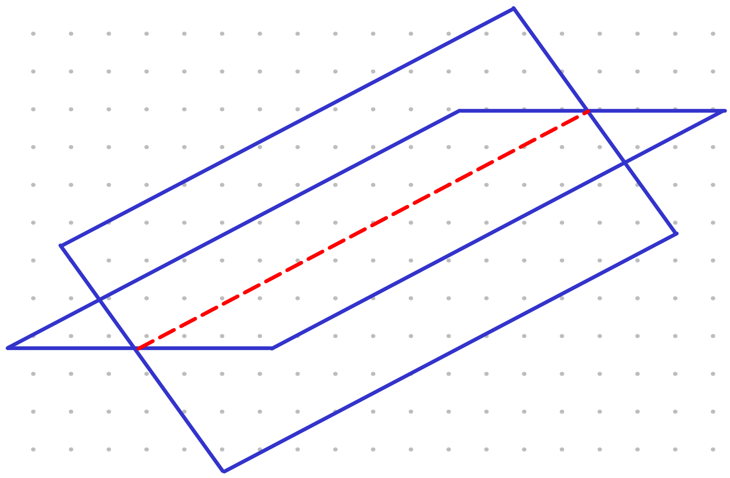
Bestimme hieraus a_1, a_2, a_3 und b.

...

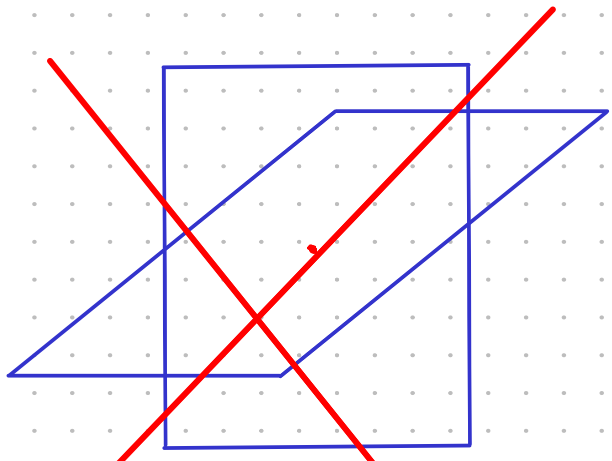
Schnitte von Ebenen in $\mathbb{R}^3$

2 Ebenen

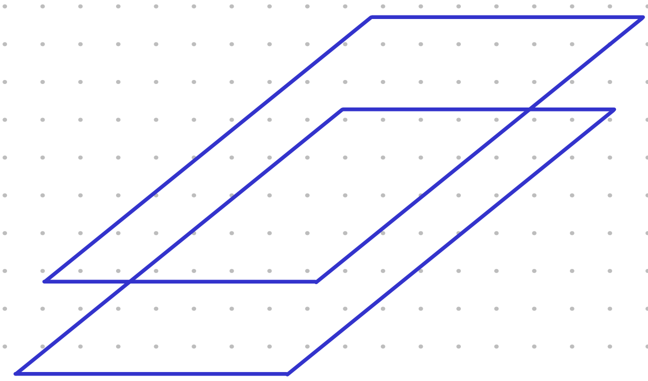
$E_1 = E_2$



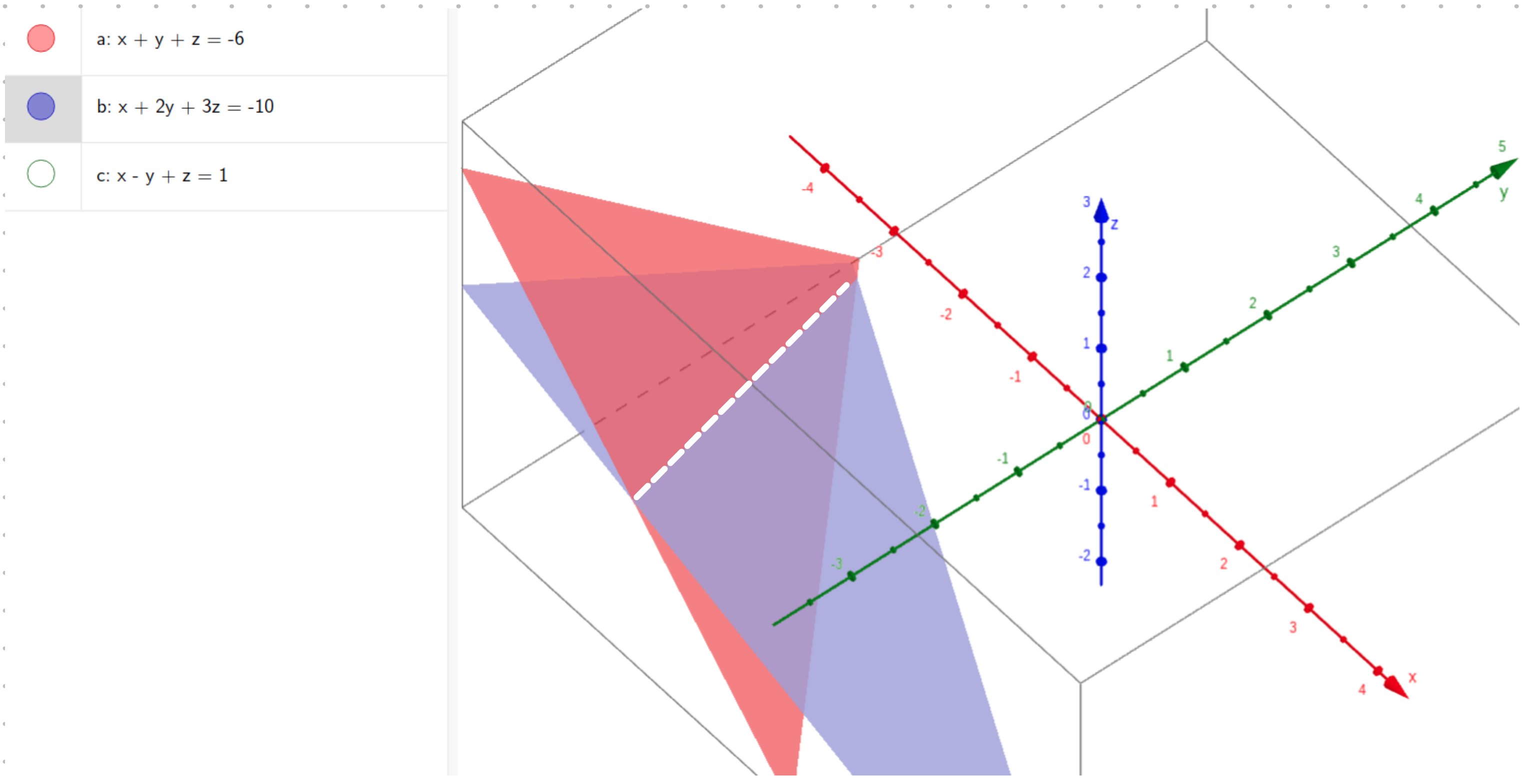
$E_1 \cap E_2$ Gerade



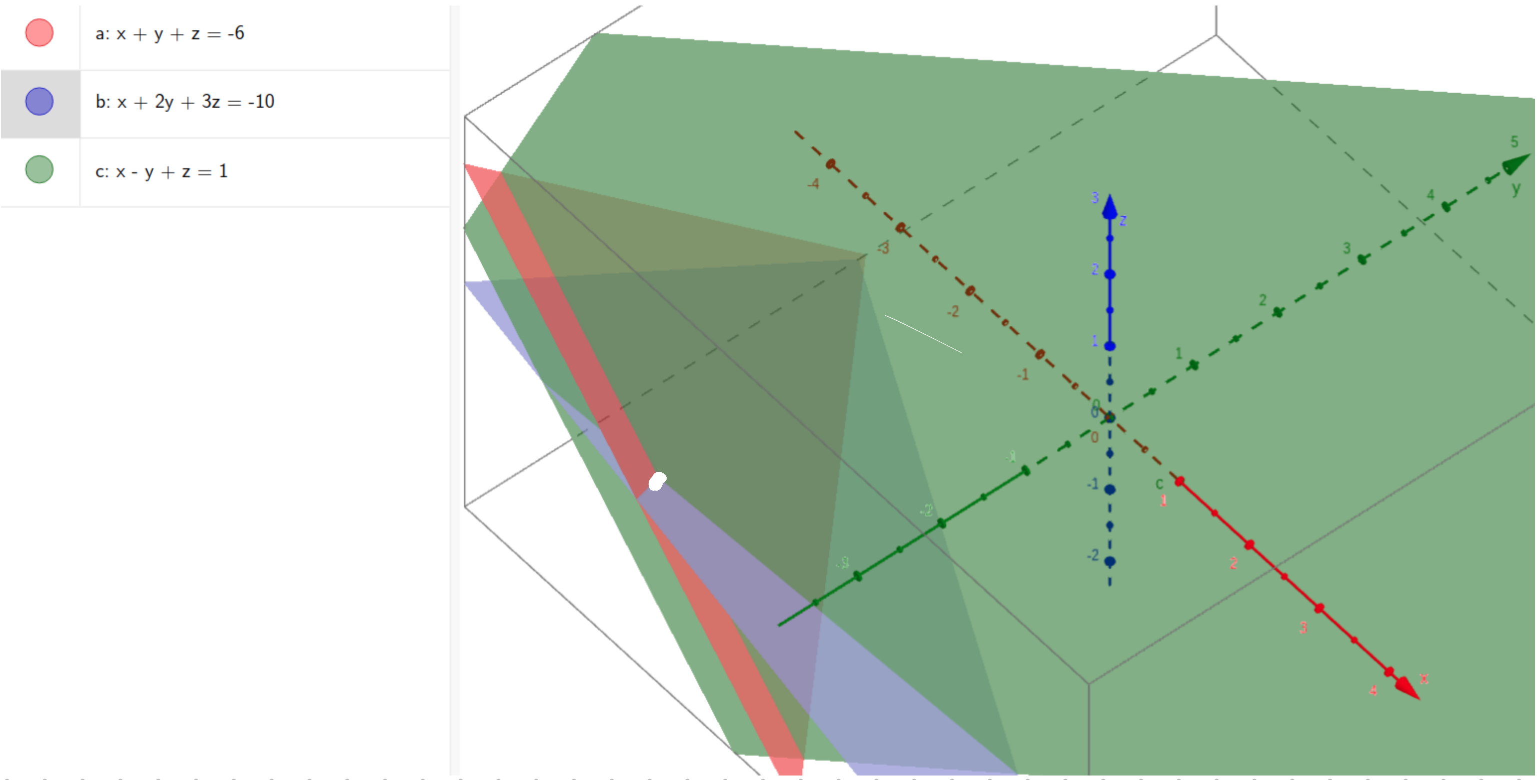
~~$E_1 \cap E_2$ Punkt~~



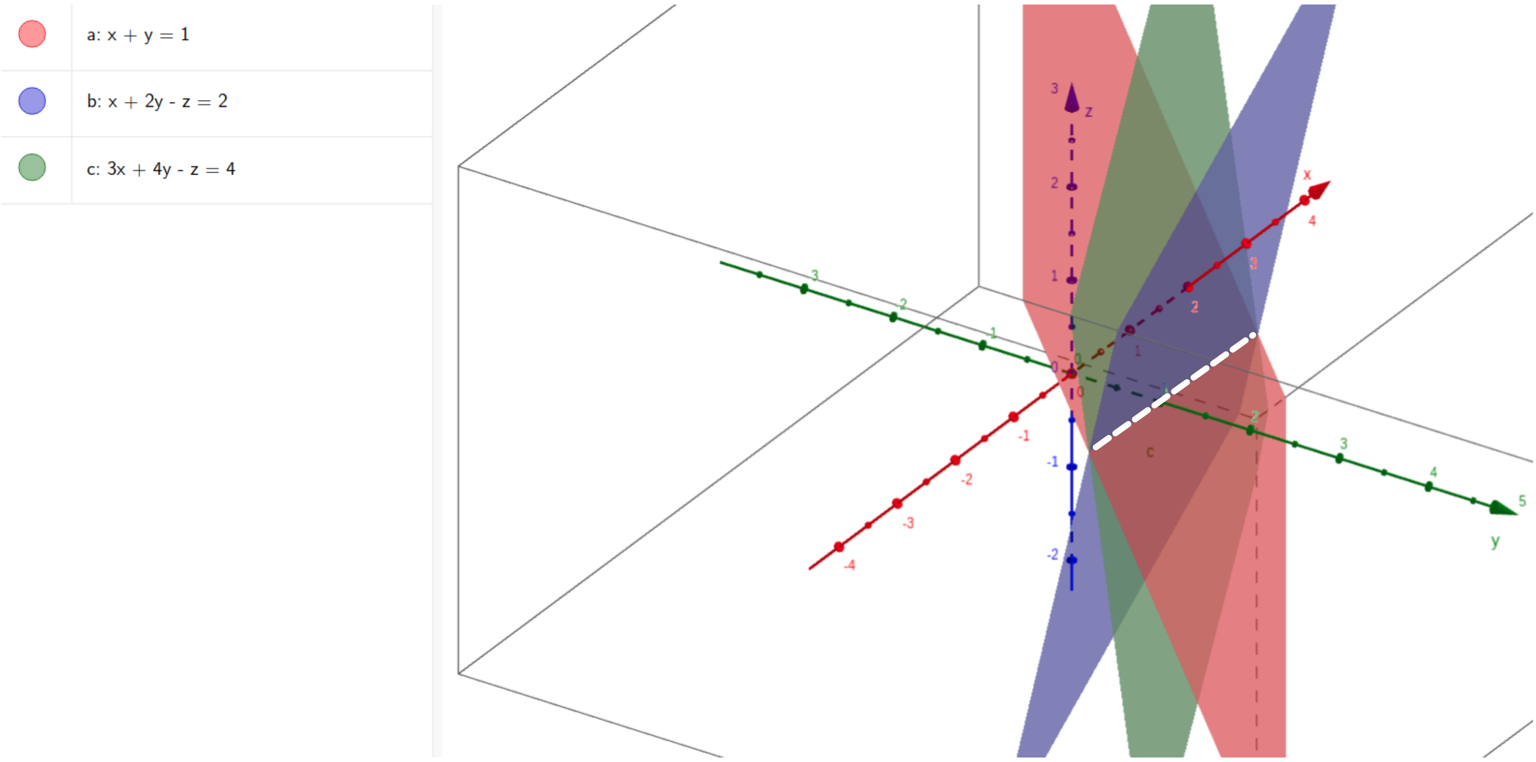
$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

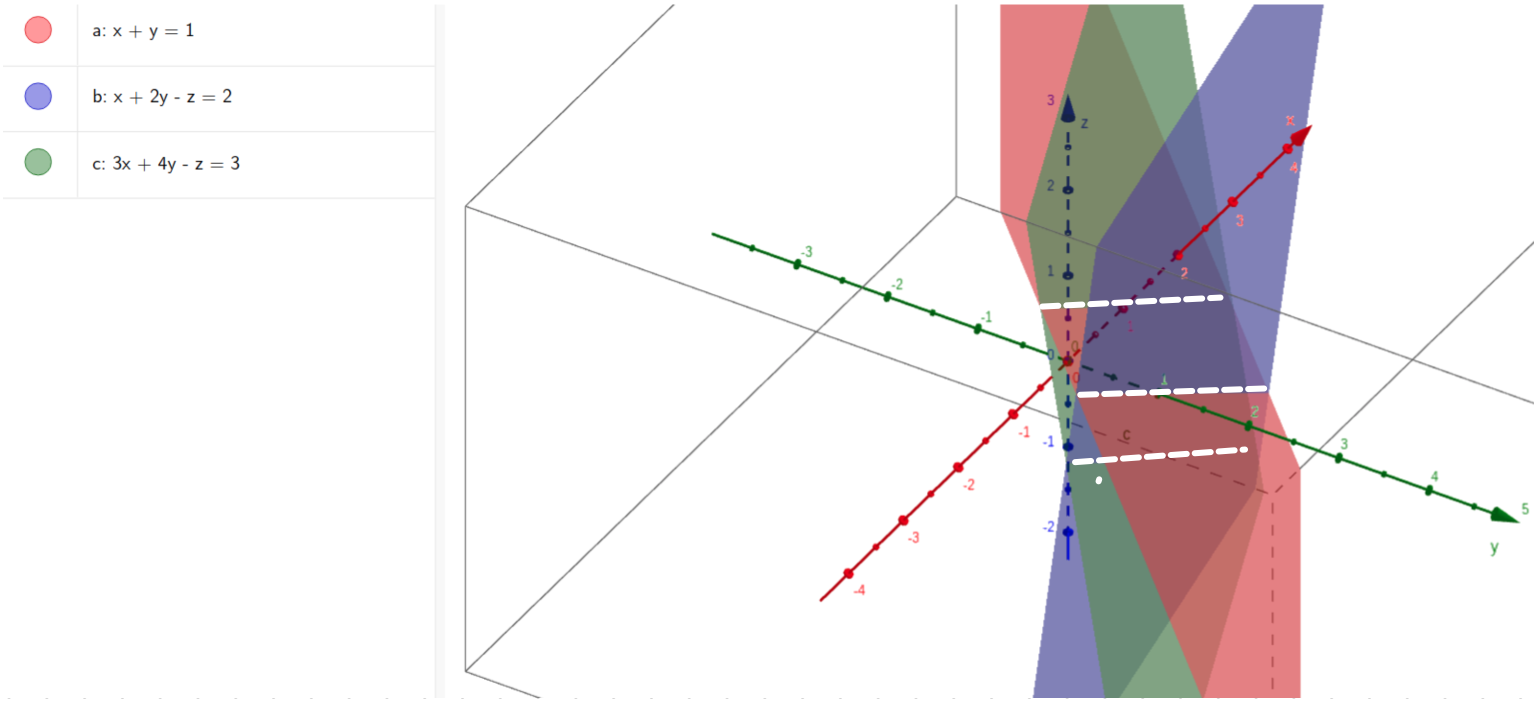


$E_1 \cap E_2$



$E_1 \cap E_2 \cap E_3$


a: x + y = 1
b: x + 2y - z = 2
c: 3x + 4y - z = 4


a: x + y = 1
b: x + 2y - z = 2
c: 3x + 4y - z = 3