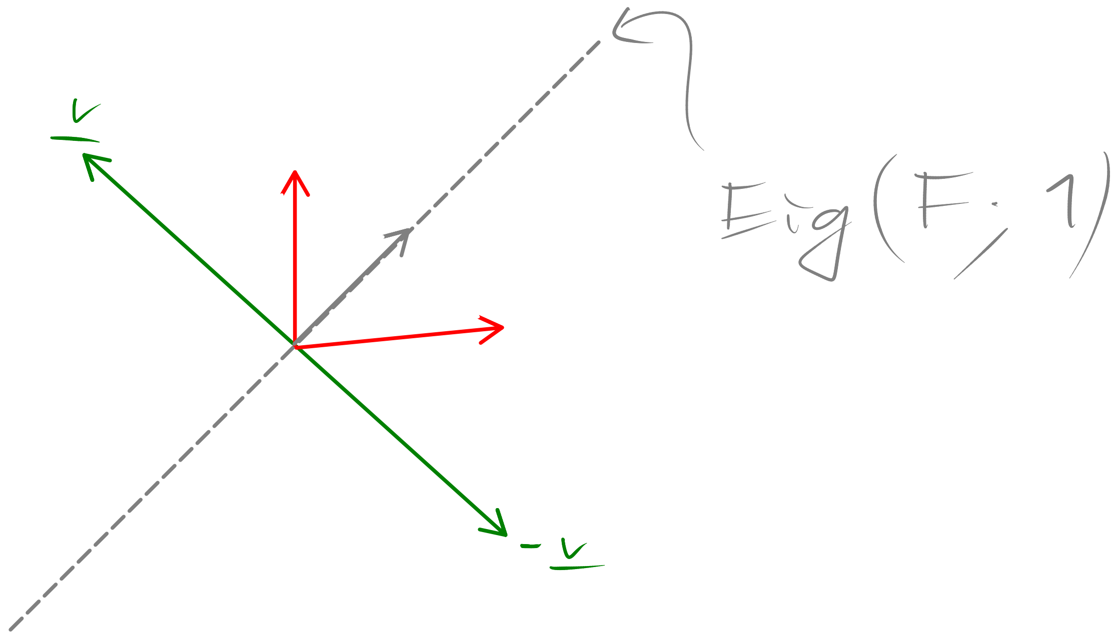
Endomorphismus F diagonalisierbar

$\Longleftrightarrow \exists$ Basis aus EV von F

b: $F(\underline{v}) = 2 \cdot \underline{v}$,

d.h. jeder Vektor ist EV

c:



$\mathrm{span}(\underline{v}) = Eig(F;-1)$

$\dim Eig(F;-1) + \dim Eig(F;+1) = \dim \mathbb{R}^2$

d: $F(\underline{0}) \neq \underline{0}$, also F linear e: EW: -1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(F, -1) = \mathbb{R}^2$$

f: $$\chi_F(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix}$$
$$= (2-t)^2$$
$$= (t-2)^2$$

Also ist 2 der einzige EW.
(mit algebraischer Vielfachheit 2)

Geom. Vielfachheit

$$\overset{\text{DEF}}{=} \dim \mathrm{Eig}(F; 2)$$
$$= \dim \mathrm{Lös}(F - 2 \cdot \mathrm{id})$$
$$= \dim \mathrm{Lös}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \dim \mathrm{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2 - \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 1$$

F diagonalisierbar
$\iff \exists$ Basis aus EV

Hier: es gibt nur EW 2
und $\dim \mathrm{Eig}(F;2) = 1$.

h: $$\chi_F = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}$$
$$= t^2 + 1 \quad \in \mathbb{R}[t]$$
hat keine (reellen) NS,
also hat F keine
(reellen) EW.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4-t & 1 \\ -3 & -t \end{pmatrix} = (4-t)\cdot(-t) - 1\cdot(-3)$$

$$= -4t + t^2 + 3$$

$$= t^2 - 4t + 3$$

$$= (t-1)\cdot(t-3)$$

EW: $1, 3$

$$\operatorname{Eig}(F, 1) = \text{Lös}\,(F - 1\cdot E_2)$$

$$= \text{Lös} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Lös} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$= \text{Lös} \begin{pmatrix} 1 & \tfrac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -\tfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(Probe: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tfrac{4}{3} + 1 \\ \tfrac{3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$\mathrm{Eig}(F,3) = \mathrm{Lös}\begin{pmatrix} 4-3 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Lös}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad +3$$

$$= \mathrm{Lös}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(Probe: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

2 EW:

$\lambda = 1$ $\quad \mathrm{Eig}(F, 1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\lambda = 3$ $\quad \mathrm{Eig}(F, 3) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Also ist für $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_F = (t-1)(t-3)$$

$p \in \mathbb{R}[t]$

$$p = q \cdot \underline{(t-\lambda_1)}^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_\ell)^{r_\ell}$$

ohne Nullstellen

$$= q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \cdot (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_\ell)^{r_\ell}$$

Grad 2

z.B. $q_1 = t^2+1$

c: $\mathrm{id}: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$0: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b: $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$$\chi_F = (2-t)^2 = (t-2)^2$$

$\dim \mathrm{Eig}(F; 2) = 1$ (s.o. $\mathbb{R}$)

Also nicht diagonalisierbar.

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} \lambda_\ell & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_\ell \end{matrix} \end{pmatrix}$$