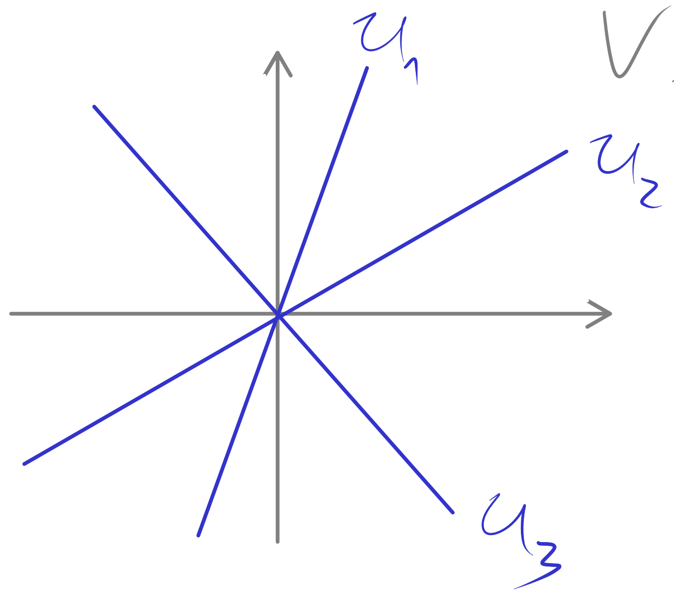
$$\operatorname{span}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$$



$V = \mathbb{R}^2$

c:

$$\underbrace{U_1 + \underbrace{(U_2 \cap U_3)}_{\{0\}}}_{U_1} \qquad \Big| \qquad \underbrace{\underbrace{(U_1 + U_2)}_{\mathbb{R}^2} \cap \underbrace{(U_2 + U_3)}_{\mathbb{R}^2}}_{\mathbb{R}^2}$$

b:

$$\underbrace{U_1 \cap \underbrace{(U_2 + U_3)}_{\mathbb{R}^2}}_{U_1} \qquad \Big| \qquad \underbrace{\underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\{0\}} + \underbrace{(U_2 \cap U_3)}_{\{0\}}}_{\{0\}}$$

$V = \mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-VR

$U = \mathbb{Q}$

<u>Beh:</u> $\nexists\, (W, F)$:

W $\mathbb{Q}$-VR,

F $\mathbb{Q}$-lineare Abb. $\mathbb{R} \longrightarrow W$

mit $\operatorname{Ker} F = \mathbb{Q}$

$U \subset V$

$U \xhookrightarrow{i} V$ Inklusion

$\underline{u} \longmapsto \underline{u}$

$V \xrightarrow{\pi} V/U := V/\sim_U$ Quotientenabb.

$\underline{v} \longmapsto \underline{v} + U = [\underline{v}]$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(\pi) &= \{ \underline{v} \mid [\underline{v}] = [\underline{0}] \} \\
&= \{ \underline{v} \mid \underline{v} \sim_U \underline{0} \} \\
&= \{ \underline{v} \mid \underline{v} - \underline{0} \in U \} \\
&= \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in U \} = U
\end{aligned}$$

$\underline{v} \in \operatorname{Ker}(F \circ G)$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Ker}(G) \ni \underline{v}$

$$(F \circ G)(\underline{v}) = F(G(\underline{v})) = \underline{0} \quad \Leftarrow \quad G(\underline{v}) = \underline{0}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left, "0"] & V \arrow[r, "0"] & W \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Ker}(0 \circ G) = \operatorname{Ker}(0) = U \qquad \operatorname{Ker}(G) = \{\underline{0}\}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R}^0$$

~~(a)~~

<u>zz:</u> $\operatorname{Ker}(F \circ G) \subset \operatorname{Ker}(G)$

Sei $\underline{v} \in \operatorname{Ker}(F \circ G)$, also

$$F(G(\underline{v})) = \underline{0} \;.\!= F(\underline{0})$$

Da F injektiv ist, folgt

$$G(\underline{v}) = \underline{0},$$

d.h. $\qquad \underline{v} \in \operatorname{Ker}(G)$ $\qquad \square$

b: <u>zz:</u> $\operatorname{Im}(F \circ G) \supset \operatorname{Im}(F)$.

Sei $\underline{w} \in \operatorname{Im}(F)$, also

$$\underline{w} = F(\underline{v}) \text{ für ein } \underline{v} \in V.$$

Da G surjektiv ist,

$$\underline{v} = G(\underline{u})$$

für ein $\underline{u} \in U$. Somit

$$\underline{w} = F(G(\underline{u})). \qquad \square$$

Für beliebige Matrizen

$A, B, C \in M(n \times n; K)$, $\lambda \in K$

gilt:

(a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ✓

(b) $A \cdot B = B \cdot A$ ✗ siehe Vorlesung

(c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ✓

(d) $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \cdot A$ ✓

alle Diagonaleinträge $= \lambda$
alle anderen Einträge 0

a, c: Ja, denn (laut Vorlesung) ist $(M(n \times n; K), +, \cdot)$ ist ein Ring