V VR, $\mathcal{U}, W \subset V$ UVR

(a) $\mathcal{U} + W = \mathcal{U} \cup W$

(b) $\mathcal{U} + W = \operatorname{span}(\mathcal{U} \cup W)$ DEF ✓

(c) $\mathcal{U} + W = \operatorname{span}(\mathcal{U} + W)$ ✓

(d) $\mathcal{U} + W$ DEF ✓

$$= \{ \underline{v} \in V \mid \exists k, \ell \in \mathbb{N}, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \in \mathcal{U}, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell \in W, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K, \mu_1, \dots, \mu_\ell \in K : \underline{v} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{u}_i}_{\underline{u}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \underline{w}_j}_{\underline{w}} \}$$

(e) $\mathcal{U} + W$ ✓

$$= \{ \underline{v} \in V \mid \exists \underline{u} \in \mathcal{U}, \underline{w} \in W : \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \}$$

Welche Aussagen gelten allgemein?

$U_1, U_2, U_3 \subset V$

(a) $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$ ✓

(b) $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$ ✗

(c) $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ ✗

$V \xrightarrow{F} W$ lineare Abb.

$\operatorname{Ker} F =$ (a) $\{ \underline{w} \in W \mid F(\underline{0}) = \underline{w} \}$ ✗

(b) $\{ \underline{v} \in V \mid F(\underline{v}) = \underline{0} \}$ ✓

(c) $\{ F(\underline{v}) \mid \underline{v} = \underline{0} \}$ ✗

$= \{ \underline{0} \}$

(d) Für jede lineare Abb. $V \xrightarrow{F} W$ ist $\operatorname{Ker} F \subset V$ UVR. ✓

(e) Jeder UVR von V ist der Kern einer linearen Abb. ✓

(Für jeden UVR $U \subset V$
existiert – ein VR W und
– eine lineare Abb.
$F : V \longrightarrow W$
sodass gilt: $\operatorname{Ker} F = U$.)

Eine lineare Abb. $F : V \longrightarrow W$
ist genau dann injektiv, wenn
gilt:

(a) $F(\underline{0}) = \underline{0}$ ✗ $\mathbb{R}^5 \longrightarrow \{\underline{0}\}$

(b) $F^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$ ✓

(c) $F^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{0}\}$ $\forall \underline{w} \in W$
✗ $\mathbb{R}^5 \longrightarrow \{\underline{0}\}$

(d) $\operatorname{Ker} F = \{\underline{0}\}$ ✓

(e) $\operatorname{Ker} F = \emptyset$ kein VR ✗

(f) $\dim(\operatorname{Ker} F) = 0$ ✓

V VR

$V = \{\underline{0}\} \iff \dim V = 0$

$\Rightarrow$ $\emptyset$ ist Basis von $\{\underline{0}\}$

$\Leftarrow$ Kontraposition
Basisergänzungssatz

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left, "F\circ G"] & V \arrow[r, "F"] & W \end{tikzcd}$$

linear   linear

$\cup$ $\cup$

$\mathrm{Ker}(F\circ G)$ $\mathrm{Ker}(F)$

$\mathrm{Ker}(G)$

(a) $\mathrm{Ker}\,(F\circ G) = \mathrm{Ker}\ G$ ✗

(b) $\mathrm{Ker}(F\circ G) \supset \mathrm{Ker}\ G$ ✓

(c) $\mathrm{Ker}(F\circ G) \subset \mathrm{Ker}\ G$ ✗

(d) $\mathrm{Ker}\,(F\circ G) = \mathrm{Ker}\ F$ ✗

$\mathrm{Ker}\,(F\circ G) = \mathrm{Ker}\ G$, falls

(a) F injektiv ✓

(b) F surjektiv ✗

(c) F bijektiv ✓

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R}^0$$

(a) F injektiv $\Longrightarrow$ ✓ $\mathrm{Ker}\,(F\circ G) = \mathrm{Ker}(G)$

(b) F surjektiv $\not\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,(F\circ G) = \mathrm{Ker}(G)$

(c) F bijektiv $\Longrightarrow$ ✓ $\mathrm{Ker}\,(F\circ G) = \mathrm{Ker}(G)$

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$$

(a) $\mathrm{Im}(F \circ G) = \mathrm{Im}\, G$ ✗

(b) $\mathrm{Im}(F \circ G) \supset \mathrm{Im}\, F$ ✗

(c) $\mathrm{Im}(F \circ G) \subset \mathrm{Im}\, F$ ✓

(d) $\mathrm{Im}(F \circ G) = \mathrm{Im}\, F$ ✗

$\{F(G(\underline{u}))\}$ $\qquad\qquad$ $\{F(\underline{v})\}$

(a) ✗ G injektiv $\Longrightarrow \mathrm{Im}(F \circ G) = \mathrm{Im}\, F$

(b) ✓ G surjektiv $\Longrightarrow \mathrm{Im}(F \circ G) = \mathrm{Im}\, F$

(c) ✓ G bijektiv $\Longrightarrow \mathrm{Im}(F \circ G) = \mathrm{Im}\, F$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

(a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 2e & f \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$ ✗

(b) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$ ✓

(c) $\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix}$ ✗