$$(R,+,\cdot) \xrightarrow{f} (S,+,\cdot)$$

Ringhomomorphismus [mit Eins]

$$\boxed{f(x+y) = f(x)+f(y)} \Rightarrow f(0)=0$$

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$$

$$[\, f(1) = 1 \,]$$

$$\boxed{\begin{aligned} e:\quad & \tilde{f}(1+2) = \tilde{f}(3) = \underline{9} \\ & \tilde{f}(1)+\tilde{f}(2) = 1+4 = 5 \ \# \end{aligned}}$$

$$f:\quad \hat{f}(1\cdot 2) = f(2) = 6$$

$$\hat{f}(1)\cdot\hat{f}(2) = 3\cdot 6 \neq 18$$

V, W K-VR

$V \xrightarrow{F} W$ ist K-linear, falls

$(V,+) \longrightarrow (W,+)$ Gruppenhomom.

(d.h. $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$)

und $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$

$(\forall\, v, v_1, v_2 \in V \;\; \forall\, \lambda \in K)$

f: $\hat{f}(1 \cdot 2) = f(2) = 6$

$\hat{f}(1) \cdot \hat{f}(2) = 3 \cdot 6 \cancel{=} 18$

$1 \cdot \hat{f}(2) = 1 \cdot 6 = 6$

Reelles Polynom von ungeradem Grad hat stets eine Nullstelle.

$$f = a \cdot \prod_i (t-\lambda_i) \cdot g_1 \cdot \ldots \cdot g_k$$

Grad 0

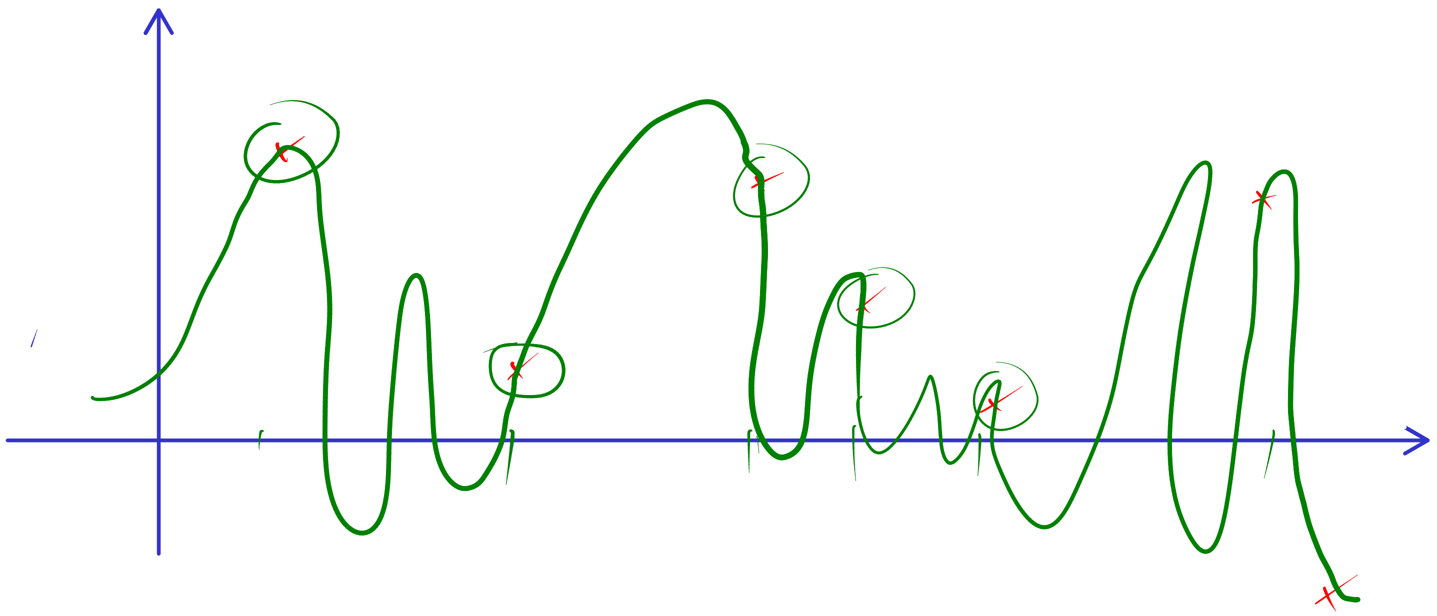
Grad 1, mit Nullstelle

Grad 2, ohne reelle Nullstelle

(z.B. $g_i = t^2 + 1$)

$a \in \mathbb{R}$

$$f = \frac{(t-1)(t-2)\cdot \ldots \cdot (t-99)}{(100-1)\cdot(100-2)\cdot\ldots\cdot(100-99)}$$



$$f = \frac{y}{\prod_i (x-x_i)} \prod_{i=1}^{n} (t-x_i)$$

Sei $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}$

Dann ist

$$\lambda_1 \underline{v}_2 + \lambda_2 \underline{v}_2 + 0 \cdot \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ linear unabh.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 = 0$

Basis = linear unabh. + Erzeugendensystem

$\operatorname{span}(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$

$\operatorname{span}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$

$\left(\sum_{\emptyset} = \underline{0}\right)$

Sei $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

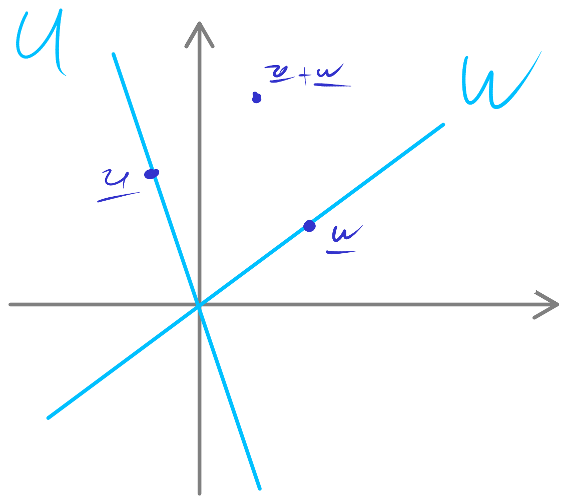
Zu zeigen: $\lambda = 0$. !?

$1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$, aber $1 \neq 0$,

also $\underline{0}$ linear abhängig.

Sei $\sum_{\emptyset} = 0$

Alle Koeffizienten sind Null (denn es gibt gar keine Koeffizienten). $\square$



$V = \mathbb{R}^2$

$U + W = \mathbb{R}^2$

$U+W$
- soll UVR von V sein
- soll U und W enthalten

= „kleinste UVR der U und W enthält"

$:= \operatorname{span}(U \cup W)$

(c): $\operatorname{span}(U+W)$

$= \underbrace{\operatorname{span}(\operatorname{span}(U \cup W))}$

$= \operatorname{span}(U \cup W) = U + W$

(e)

$$\mathcal{U} + W$$

$$= \{ \underline{v} \in V \mid \exists \, \underline{u} \in \mathcal{U}, \ \underline{w} \in W : \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \}$$