Welche Struktur ist ein Körper?

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ✓

(b) $(\cancel{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ zu 2 existiert kein multiplikat. Inv.

(c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ✓

(d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ✓

(e) $\cancel{(\mathbb{R}^{\times}, +, \cdot)}$ $(\mathbb{R}^{\times}, +)$ keine Gruppe denn es fehlt neutrales Element

(f) $\cancel{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

(g) $(\cancel{\mathbb{R}[t]}, +, \cdot)$

(h) $(\cancel{\mathbb{C}[t]}, +, \cdot)$ $\ni t$

(i) $(\cancel{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}, +, \cdot)$

$$\boxed{\begin{array}{c} [2]\cdot[3] = 0 \\ \ne 0 \quad\quad \ne 0 \end{array}}$$

(j) $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ✓

prim

Für jeden Körper K, und jedes $\boxed{a \in K^{\times}}$ ist die Abbildung

$$K \longrightarrow K$$
$$x \longmapsto x \cdot a$$

(a) wohldefiniert

(b) injektiv

(c) surjektiv

(d) bijektiv ⟵ $\exists$ Multiplikation mit a^{-1}

Welches Symbol ist ein Polynom in $\mathbb{R}[t]$?

(a) $t^{1000000000}$

(b) $t + t^{-1}$

(c) $\sum_{i=1}^{6} i \cdot t^i$

(d) $\sum_{i=1}^{6} \frac{i^2+1}{i} \cdot t^i$

(e) $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot t^i$

(f) $t^2 - 3t + 5$

(g) $(t-\pi)(t+27)$

(h) $(t-(3+2i)) \cdot (t-(3-2i))$?

$\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

(i) 0

(j) t^π

(k) 2021

$$t^2 - (3+\cancel{2i})t - (3-\cancel{2i})t + (3+2i)(3-2i)$$

$$= t^2 - 6t + 3^2 - (2i)^2$$

$$= t^2 - 6t + 13 \in \mathbb{R}[t]$$

$$(t-z)(t-\bar{z}) \in \mathbb{R}[t]$$

Das Polynom $t^2+t \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[t]$ $\underbrace{\text{hat}\ 4}_{\text{mindestens}}$ Nullstellen ($0 = [6], [2], [3], [5]$) ✓

Es gibt ein Polynom
$$0 \neq at^2+bt+c \in \mathbb{Z}/\underbrace{7\mathbb{Z}}_{\substack{\text{prim} \\ = \text{Körper}}}[t]$$
das 3 Nullstellen hat.

Falls $\overset{0}{\underset{}{\not{\shortparallel}}}\; f \in K[t]$ (K Körper)
ist (Anzahl der Nullstellen von f)
$$\leq \deg(f)$$

in $\mathbb{R}^3$

(a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ abhängig

(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ unabhängig

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ abhängig

(d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ abhängig

(e) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ unabhängig

(f) $(\underline{v})$ $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ abhängig

Basis von

$$W := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \cdot \frac{1}{2} & \cdot -\frac{1}{6} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} -2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} -1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$