Beweis durch Widerspruch

Satz: A

Beweis: Angenommen $\neg A$.
Dann folgt einerseits
(*).
Andererseits folgt ...
... schließlich (**).
(**) $\lightning$ (*) $\square$

Genau eine der Aussagen $A, \neg A$ **muss** gelten.

Satz: Sei $n \in \mathbb{Z}$.
Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.

A

Beweis:

Angenommen, der Satz ist falsch:
Es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass n^2 gerade, aber n ungerade ist.

$\neg A$

Insbesondere: (*) n^2 gerade.
Andererseits gilt für n:

Es ex. $k \in \mathbb{Z}$: $n = 2k+1$,
und daher
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

Also folgt: (**) n^2 ungerade.

(*) $\lightning$ (**) $\square$

Satz: Für einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind äquivalent:

(A) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{0}$

(B) Für jeden anderen Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

(C) $\sqrt{\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\geq 0}} = 0$

Beweis:

$(A \Rightarrow B)$ Nach Annahme ist $x_1 = x_2 = 0$, also ist

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 + 0 = 0.$$

$(B \Rightarrow C)$ Wähle $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und ziehe Wurzel.

$(C \Rightarrow A)$ Nach Annahme ist $\underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} = 0$

Also ist $x_1^2 = 0$ und $x_2^2 = 0$,
also $x_1 = 0$ " $x_2 = 0$. $\square$

Satz: $\underbrace{1+2+\ldots+n}_{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:

$A(0)$ $\quad 0 = \frac{0\cdot 1}{2}$ ✓

$A(1)$ $\quad 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ✓

Angenommen

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann ist

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}+(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$\square$

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Beweis:

I-Anfang: $0^2 = 0$ ✓

$$\left(1^2 = 1^3 \right)$$

I-Annahme:

$$(1 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$.

I-Schluss: Dann ist

$$\Big(\underbrace{1 + \ldots + n}_{} + \underbrace{(n+1)}_{}\Big)^2$$

$$= \underbrace{(1 + \ldots + n)^2}_{IA} + 2\underbrace{(1 + \ldots + n)}_{}(n+1) + (n+1)^2$$

$$= 1^3 + \ldots + n^3 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n+1) + (n+1)^2$$

$$= 1^3 + \ldots + n^3 + \underbrace{n}_{} \cdot (n+1)^2 + \underbrace{1}_{} \cdot (n+1)^2$$

$$= 1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3$$

$\square$

Satz: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: Eine Matrix mit m Zeilen lässt sich durch EZU auf ZSF bringen.

Beweis:

$A(0)$ ✓

$A(1)$ ✓

I-Annahme: Eine Matrix mit m Zeilen kann ich durch EZU auf ZSF bringen.

I-Schluss: Betrachte Matrix A mit $m+1$ Zeilen.

... wie heute Morgen ...

$$A'' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & a^{\neq 0} & \\ \hline 0 & & 0 & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Nach Induktionsannahme kann ich Zeilen $2, \dots, m+1$ durch EZU auf ZSF bringen.

Die Matrix, die so entsteht, hat ZSF. $\square$