Aufgabe 1

a) Gesucht ist die Parameterdarstellung der Ebene E in der Form $E: \vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{w}_1 + s \cdot \vec{w}_2$.

Dazu finde man 3 nicht-kollineare bzw. linear unabhängige Vektoren in E:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$$

Diese Vektoren sind l.u.: $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+s \\ 2s+5t \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r=0, s=0, t=0.$

Also ist $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gesucht ist die Koordinatenform $ax_1+bx_2+cx_3=d$ der Ebene F

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}$ sind drei l.u. Vektoren in F

$$\begin{aligned}
(1)&\quad 1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c=d\\
(2)&\quad 3\cdot a+3\cdot b+1\cdot c=d\\
(3)&\quad 6\cdot a+4\cdot b-1\cdot c=d
\end{aligned}
\iff
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}\\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 6 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[Z3-6Z1]{Z2-3Z1}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow{Z2:(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow{Z1-Z2}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right)
\overset{Z2\leftrightarrow Z3}{\longleftrightarrow}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}\\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -7 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\end{array}$$

$\Rightarrow c=d$, $-2b-7c+5d=-2b-2c=0 \Rightarrow b=-c$; $a=-b=c$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

Für $c = 1$ erhalten wir $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$ und die Koordinatenform $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ von F.

Aufgabe 2

a), c): Das inhomogene LGS ist äquivalent zur folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 9 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & t \\ -7 & 7 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{Z2-Z1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & t \\ -7 & 7 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-3Z3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-3t \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & t \\ -7 & 7 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z4+Z2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-3t \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 7 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{S4 \leftrightarrow S2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-3t \end{array}\right) \end{array} \quad (\text{ZSF})$$

Aus der letzten Zeile folgt $2-3t=0$, womit das LGS nur für $t=\frac{2}{3}$ lösbar ist.

c) Im Fall $t \neq \frac{2}{3}$ ist daher $\mathbb{L} = \{\ \}$, für $t = \frac{2}{3}$ ist das LGS nach a) äquivalent zu

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow x_3 = \frac{2}{3} - 3x_2 \,,\, x_5 = -5 - 7x_1 \,;\, x_4 = 3x_3 + 7x_2 + 1 =$$

$$2 - 9x_2 + 7x_2 + 1 = 3 - 2x_2 \,,$$ also gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Nach a) ist das homogene LGS äquivalent zu folgender ZSF:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_3 = -3x_2 \,,\, x_5 = -7x_1 \,,\, x_4 = 3x_3 + 7x_2 = -9x_2 + 7x_2 = -2x_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sind l.u. und bilden Basis von } \mathbb{L}} \cdot x_2 \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (1. Lösung)

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x+y-z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ l.u. sind, hat V die Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit auch B, denn in einer Basis darf jeder Basisvektor durch skalares Vielfaches $\neq 0$, in dem Fall $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ durch $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ersetzt werden (Basisaustauschsatz).

Ferner folgt aus dem Basisaustauschsatz, dass auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \overset{1 \neq 0}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, also B', eine Basis von V.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+2z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ l.u. sind, hat W die Basis C.

Nach dem Basisaustauschsatz ist auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis von W

und daher $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, also C', eine Basis von W.

b) analog Aufgabe 11-1 b)

Transformationsformel: $M_{C'}^{B'}(F) = T_{C'}^{C} \cdot M_C^B(F) \cdot T_B^{B'}$

Berechne $T_{C'}^{C}$: Stelle die Vektoren aus C als Link. der Vektoren aus C' dar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+s \\ 3r+2s \\ r+\frac{1}{2}s \end{pmatrix} \underset{Z1-Z3}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}s = 1,\ r=-1 \Leftrightarrow r=-1,\ s=2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+s \\ 3r+2s \\ r+\frac{1}{2}s \end{pmatrix} \underset{Z1-Z3}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}s = -1,\ r=2 \Leftrightarrow r=2,\ s=-2$$

$$\Rightarrow T_{C'}^{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechne $T_B^{B'}$: analog

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \overset{r}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{s}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \overset{r}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{s}{0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_B^{\ B'} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen liefert:

$$M_{C'}^{\ B'}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (2. Lösung)

a) Analog zur 1. Lösung zeigt man: V hat die Basis B und W die Basis C.

Alternativer Nachweis zu: V hat die Basis B'

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ liegen in V (erfüllen $3x+y-z=0$) und sind l.u. ($\Leftarrow 0$ in 2. Zeile).

Sie können also zu einer Basis B' von V ergänzt werden. Da aber $\dim V = 2$ gilt

($\Leftarrow$ B ist Basis von V der Länge 2), müssen sie bereits selbst die Basis B' bilden.

Alternativer Nachweis zu: W hat die Basis C'

analog

b) Verwende [S. 6-7, Vorlesung 20 links]

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \underbrace{L_{C'} \cdot C}_{:= T_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot \underbrace{L_B \cdot B'}_{:= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} \quad , \text{ wobei}$$

$B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ spaltenweise die Basisvektoren von

$\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ enthält und $L_{C'}$ bzw. L_B ein Linksinverses zu C' bzw. B.

1) Bestimme $L_{C'}$ nach [S.2, Vorlesung 19 links]

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 1/2\end{matrix}}_{C'}\;\middle|\;\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow[Z3-Z1]{Z2-3Z1} \left(\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow{Z2:(-1)} \left(\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow[Z3+\frac{1}{2}Z2]{Z1-Z2}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}}_{\begin{pmatrix}E_2\\ 0\end{pmatrix}}\;\middle|\;\begin{matrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{matrix}\right) \Rightarrow L_{C'} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix} \text{ und } L_{C'} \cdot C = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}}_{T_{C'}^{C} \text{ aus 1. Lösung}}$$

2) Bestimme L_B nach [S. 2, Vorlesung 19 links]

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z3 \leftrightarrow Z1]{} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z3 - \frac{1}{3} Z1]{} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z3 + \frac{1}{3} Z2]{Z1 - Z2}$$

(the first two columns of the first matrix are marked with a brace labelled B)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow L_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } L_B \cdot B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T_B^{B'} \text{ aus 1. Lösung}}$$

(the first two columns of the first matrix are marked with a brace labelled $\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$)

3) Ergebnisse einsetzen und analog zur 1. Lösung $M_{\mathcal{E}}^{B'}(F)$ berechnen.

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Die folgenden Relationen auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind **transitiv**:

■ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x > y$

□ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \cdot y = 0$ $\quad x=1, y=0, z=1 \Rightarrow x \sim y \wedge y \sim z$, aber $x \not\sim z$

■ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$

(2) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

■ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $[n] \mapsto (-1)^n$

□ $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\frac{p}{q} \mapsto p$ $\quad ; \frac{2}{1} \to 2, \ \frac{4}{2} \to 4$

□ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $[n] \mapsto n$ $\quad [0] = [5]$

(3) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **surjektiv**, wenn gilt:

■ Zu jedem $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

□ Zu jedem $a \in A$ existiert mindestens ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

□ Aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.

(4) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

□ Ist g injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv. $\quad X = Y = Z = \mathbb{R}, \ \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \ g(x) = x, \ f(x) = |x| \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(x) = |x|$

■ Ist g surjektiv und f bijektiv, so ist $f \circ g$ surjektiv.

□ Ist f surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv. $\quad X = Y = Z = \mathbb{R}, \ \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \ g(x) = x^2, \ f(x) = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2$

(5) Für jede **Gruppe** $(G, \star)$ gilt:

■ Es gibt ein $e \in G$, sodass für jedes $g \in G$ gilt $e \star g = g$.

■ Es gibt ein $e \in G$, und für jedes $g \in G$ ein $g' \in G$, sodass gilt: $g' \star g = e$.

□ Für alle $h, g_1, g_2 \in G$ gilt $h \star (g_1 + g_2) = h \star g_1 + h \star g_2$.

(6) Die folgenden Ringe sind Körper:

□ $\mathbb{Z}$

□ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

■ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

(7) In jedem **Körper** K gilt:

■ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha + \beta = 0$.

□ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$. $\quad \alpha = 0$

□ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K \setminus \{0\}$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.

(8) Ein **Polynom** im Polynomring $K[t]$ über einem Körper K ist

□ eine lineare Abbildung $K \to K$.

■ eine formale Summe $a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$ mit $a_0, \ldots, a_n \in K$.

□ eine Abbildung der Form $t \mapsto a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$ für gewisse $a_0, \ldots, a_n \in K$.

Aufgabe 5

Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Die **Skalarmultiplikation** auf einem K-Vektorraum ist eine Abbildung

☐ $V \times V \to V$.

■ $K \times V \to V$.

☐ $V \times V \to K$.

(2) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)

■ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

■ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen als Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

(3) Sei V ein K-Vektorraum, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Unter einer **Linearkombination** von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ versteht man

■ jede beliebige Summe der Form $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in K$.

☐ nur solche Summen $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in K \setminus \{0\}$.

☐ einen der vier Vektoren $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(4) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

■ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.

☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$.

☐ Es gibt kein $\alpha \in K$ mit $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}_2$. Gegenbsp.: $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 = \vec{0}$ sind l.a. $(0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0})$

(5) Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ aus V bildet genau dann eine **Basis** von V, wenn gilt:

■ $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = V$ und $\dim(V) = 3$.

☐ Alle $\mathbf{v}_i$ sind verschieden, und $\dim V = 3$.

☐ Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ existieren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$, sodass gilt: $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.

(6) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ sind invertierbar:

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

☐ $\operatorname{rang}(A) \leqslant n$. Gegenbsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$

■ A ist äquivalent zur Einheitsmatrix (d.h. es existieren invertierbare Matrixen T und S, sodass $S^{-1}AT$ die Einheitsmatrix ist). $S^{-1}AT = E_n \Rightarrow A = S \cdot E_n \cdot T^{-1}$, $S, E_n, T^{-1} \in GL(n, K)$

■ Die Zeilen von A bilden ein Erzeugendensystem von K^n.

Aufgabe 6

a) Da $\delta: W \to \{0\}$ gilt, ist $\delta(w) = 0 \ \forall w \in W$. Damit ist δ die Nullabbildung.

Da $\alpha: \{0\} \to U$ K-linear ist, gilt $\alpha(0) = 0$. Also ist α auch die Nullabbildung.

b) Nach a) ist $\delta: W \to \{0\}$ die Nullabbildung, also $\ker \delta = \{w \in W \mid \delta(w) = 0\} = W$.

Folglich ist $\operatorname{Im} \gamma = \ker \delta = W$, womit $\gamma: V \to W$ surjektiv ist.

c) Nach a) ist $\alpha: \{0\} \to U$ die Nullabbildung und daher $\{0\} = \operatorname{Im} \alpha = \ker \beta$.

Da $\beta: U \to V$ K-linear ist, folgt aus $\beta(u_1) = \beta(u_2)$ direkt $\beta(u_1 - u_2) = \beta(u_1) - \beta(u_2) = 0$,

also $u_1 - u_2 \in \ker \beta$ bzw. $u_1 - u_2 = 0$ bzw. $u_1 = u_2$. Somit ist β injektiv.

d) Da $\gamma: V \to W$ und $\beta: U \to V$ jeweils K-linear sind, liefert die Dimensionsformel

(1) $\dim V = \dim \operatorname{Im} \gamma + \dim \operatorname{Ker} \gamma$

(2) $\dim U = \dim \operatorname{Im} \beta + \dim \operatorname{Ker} \beta$

Nach b) ist $\operatorname{Im} \gamma = W$ und nach c) ist $\operatorname{Ker} \beta = \{0\}$, also $\dim \operatorname{Ker} \beta = 0$ und $\dim \operatorname{Im} \gamma = \dim W$. Wegen $\operatorname{Im} \beta = \operatorname{Ker} \gamma$ ist $\dim \operatorname{Im} \beta = \dim \operatorname{Ker} \gamma$. Dies in (1), (2) eingesetzt liefert:

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & \dim V = \dim W + \dim \operatorname{Im} \beta \\ (4) & \dim U = \dim \operatorname{Im} \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = \dim U + \dim W.$$