Aufgabe 1

Gegeben sind die folgende Gerade g und die folgende Ebene E in $\mathbb{R}^3$:

$$g := \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$E := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \right\}$$

(a) Haben g und E in $\mathbb{R}^3$ einen gemeinsamen Schnittpunkt? Wenn ja, welchen?

(b) Geben Sie eine Gerade g' an, die die Gerade g in genau einem Punkt schneidet, aber die Ebene E nicht schneidet. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Gerade diese Forderungen erfüllt!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+7r\\3+2r\\r\end{pmatrix}$, $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

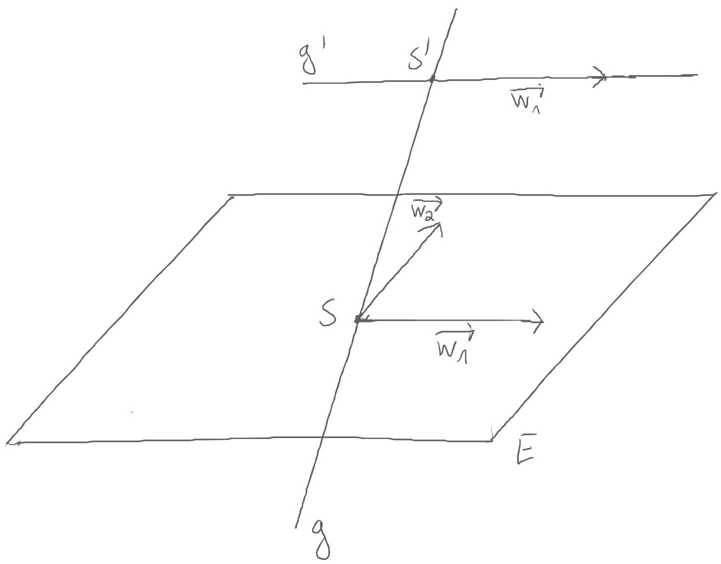
Setze Punkte von g in E ein:

$3 + 7r + 2 \cdot (3+2r) - r = 4 \Leftrightarrow 9 + 10r = 4 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

Setze $r = -\frac{1}{2}$ in g ein:

$S = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ist der gemeinsame Punkt / Schnittpunkt von g und E

b) Skizze:



1) Ermittle zunächst eine Parameterdarstellung von E in der Form $E: \vec{x} = S + r \cdot \vec{w_1} + t \cdot \vec{w_2}$ bzw. darin die Richtungsvektoren $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$:

$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in E$ (nach a))

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$, denn $0 + 2 \cdot 2 - 0 = 4$

$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$, denn $4 + 2 \cdot 0 - 0 = 4$

Dabei sind die Punkte $S, A, B \in E$ nicht kollinear (und definieren somit die Ebene E), da die zugehörigen Ortsvektoren linear unabhängig sind:

$$r \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r + 4t \\ 2r + 2s \\ -\frac{1}{2}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$r = 0$ (3. Zeile), $t = 0$ (1. Zeile $\wedge\, r = 0$), $s = 0$ (2. Zeile $\wedge\, r = 0$)

Also ist $E: \vec{x} = S + r \cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}_{= A - S} + t \cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}_{B - S}$

$$\vec{x} = S + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{:= \overrightarrow{w_1}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{:= \overrightarrow{w_2}}$$

die gesuchte Parameterdarstellung von E.

2) Wähle einen Punkt $S' \neq S$ auf g, z. B. $S' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Die Gerade $g': \vec{x} = S' + r \cdot \overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ erfüllt die gewünschten Bedingungen:

g' schneidet g in genau einem Punkt, nämlich S', da die Richtungsvektoren von g' und g keine skalaren Vielfachen voneinander sind $\left(\lambda \cdot \overrightarrow{w_1} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $S' \in g'$ sowie $S' \in g$ gilt.

g' hat keinen Punkt mit E gemeinsam, da der „Aufhängepunkt" $S' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ von g' nicht in E liegt $(\Leftarrow S' \in g \wedge g \cap E = \{S\}$ mit $S \neq S')$ und der Richtungsvektor $\vec{w}_1$ von g' zugleich ein Richtungsvektor von E ist. Somit gilt $g' \parallel E$, aber $g' \not\subset E$.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & t \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & & & x_4 & + & 3x_5 & = & -3 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(c) Geben Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

a) Das inhomogene LGS besitzt die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & t \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[Z4+3Z3]{Z2-Z1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t-2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 12 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z4-2Z1]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t-2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 10 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[Z4+3Z2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t-2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 10 & 3t-13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 10 & 3t-13 \end{array}\right) \end{array}$$

(Zeilenstufenform, kurz ZSF)

Anhand dieser ZSF erkennt man, dass das LGS für jedes $t \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung hat.

b) Das zugehörige homogene LGS hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

, welche nach den el. Zeilenumformungen in a) äquivalent zur folgenden ZSF ist:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z4:2]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow$$

$x_4 = 5x_5$; $x_3 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_5$; $x_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -\frac{1}{2}x_5 - 5x_5 + 3x_5 = -2\frac{1}{2} \cdot x_5$

Also ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_5 \;\middle|\; x_5 \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Basis $\begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Nach den el. Zeilenumformungen aus a) ist das inhomogene LGS für $t=1$ äquivalent zu der ZSF

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[Z4:2]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -5 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow$$

$x_4 = 5x_5+5$; $x_3=-1$; $x_2 = \frac{1}{2}\cdot(2-x_5) = 1-\frac{1}{2}x_5$;

$x_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 1-\frac{1}{2}x_5 + 1 - (5x_5+5) + 3x_5 = -2\frac{1}{2}x_5 - 3$

Also ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_5 \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 3
Gegeben sind die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

$$V := \{{}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$$
$$W := \{{}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ jeweils Basen von V bzw. W sind:

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathcal{C}' := \left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

(b) Sei $F\colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gegeben ist durch die Matrix
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F)$!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\-2x\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x,z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Also hat V die Basis $B' = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, da diese Vektoren l.u. sind.

Basisaustauschsatz: V hat die Basis $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, also die Basis B.

$W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\-x\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

Also hat W die Basis $C = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, da diese Vektoren l.u. sind.

Basisaustauschsatz: W hat die Basis $(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, also die Basis C'.

b) Wende die Transformationsformel auf die lineare Abb. $F: V\to W$ an:

$$(*)\quad M_{C'}^{B'}(F)=T_{C'}^{C}\cdot M_C^B(F)\cdot T_B^{B'}$$

Berechne $T_{C'}^{C}$: Stelle die Vektoren aus C als Lnk. der Vektoren aus C' dar:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow T_{C'}^{C}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Berechne $T_B^{B'}$: Stelle die Vektoren aus B' als Lnk. der Vektoren aus B dar:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow T_B^{B'}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Einsetzen in (*) liefert:

$$M_{C'}^{B'}(F) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alternative Lösung:

a) Nachweis „V hat Basis $\mathcal{B}'$" und „W hat Basis $\mathcal{C}$" wie in 1. Lösung

Basisergänzungssatz: Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ liegen in V ($\Leftarrow$ erfüllen $2x+y=0$) und sind l.u. ($\Leftarrow$ 0 in 3. Zeile). Sie lassen sich daher zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergänzen. Da aber $\dim V = 2$ ist ($\Leftarrow$ $\mathcal{B}'$ ist Basis der Länge 2 von V), müssen sie bereits selbst die Basis $\mathcal{B}$ bilden.

Analog zeigt man, dass auch $\mathcal{C}'$ Basis von W ist.

b) Verwende [S. 6-7, Vorlesung 20 links] mit $F: V \to W$ linear:

$(**)$ $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = L_{C'} \cdot C \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot L_B \cdot B'$, wobei $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ spaltenweise die Basisvektoren von $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ enthält und $L_{C'}$ bzw. L_B ein Linksinverses zu C' bzw. B ist.

Bestimme $L_{C'}$ nach [S.2, Vorlesung 19 links]:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right.}_{=C'}\left|\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right. \xrightarrow[Z3+Z1]{Z2:2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z2} \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\right.}_{=\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}}\left|\left.\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\right. \Rightarrow L_{C'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme L_B nach [S.2, Vorlesung 19 links]:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right.}_{=B}\left|\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right. \xrightarrow{Z2:(-2)} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-Z1} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-Z3} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z2 \leftrightarrow Z3} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in (~~**~~) liefert:

$$M_{C'}^{B'}(F) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Die folgenden Relationen auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind **symmetrisch**:

■ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y$ ist durch 7 teilbar

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = 2y$

■ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \cdot y = 3$

(2) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a - b$ ■ $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \mapsto \frac{q}{p}$ ☐ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$

(3) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **injektiv**, wenn gilt:

☐ Zu jedem $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

☐ Zu jedem $a \in A$ existiert höchstens ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

■ Aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.

(4) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

☐ Ist f surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv.

■ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist f surjektiv.

☐ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist f injektiv.

(5) Für jede **Gruppe** $(G, \star)$ gilt:

■ Die Verknüpfung $\star$ ist assoziativ.

☐ Die Verknüpfung $\star$ ist kommutativ.

☐ Die Verknüpfung $\star$ ist symmetrisch.

(6) Die **symmetrische Gruppe** $\mathbb{S}_3$ besteht aus

■ den bijektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$.

☐ den symmetrischen 3×3-Matrizen.

☐ allen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(7) Die folgenden Ringe sind Körper:

☐ $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

■ $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)

☐ $\mathbb{R}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{R}$)

(8) In jedem **Körper** K gilt:

■ Die Addition ist assoziativ und kommutativ.

■ Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

☐ Für je drei Elemente $\alpha, \beta, \gamma \in K$ ist $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$.

Aufgabe 5
Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Zur Struktur eines K-**Vektorraums** gehört

■ eine Verknüpfung $V \times V \to V$.

☐ eine Abbildung $V \times V \to K$.

■ eine Abbildung $K \times V \to V$.

(2) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Wir können die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auffassen als einen ein-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)

■ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als einen ein-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

■ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen als einen ein-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

(3) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum V bilden genau dann ein **Erzeugendensystem von** V, wenn gilt:

■ Für jedes $\mathbf{v} \in V$ existieren $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, sodass gilt $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$.

☐ Für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ist $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \in V$.

☐ Für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein $\alpha \in K$, sodass entweder gilt $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1$ oder $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_2$.

(4) Ein Tupel von Vektoren $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist eine **Basis** eines Vektorraums V, wenn gilt:

■ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist linear unabhängig und ist ein Erzeugendensystem von V.

☐ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist linear abhängig und ist ein Erzeugendensystem von V.

☐ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist linear unabhängig und ist ein Erzeugendensystem von $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

(5) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (4x+y, -5y)$ wird bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix dargestellt:

☐ $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

(6) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ sind invertierbar:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

■ $\operatorname{rang}(A) = n$.

☐ A ist ähnlich ist zur Einheitsmatrix (d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T, sodass $T^{-1}AT$ die Einheitsmatrix ist).

■ $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 6

Wir fixieren einen Körper K und betrachten den K-Vektorraum $\mathrm{M}(n \times n; K)$ der $n \times n$-Matrizen. Die Spur einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist definiert als

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}(n \times n; K) \to K$ definiert.

(b) Zeigen Sie ferner, dass die Abbildung tr surjektiv ist.

(c) Sei M^0 die Menge der spurlosen Matrizen, also

$$\mathrm{M}^0 := \{A \in \mathrm{M}(n \times n; K) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass M^0 ein Untervektorraum von $\mathrm{M}(n \times n; K)$ ist.

(d) Berechnen Sie $\dim_K(\mathrm{M}^0)$!

(e) Sei M^δ die Menge der Matrizen, deren Determinante verschwindet, also

$$\mathrm{M}^\delta := \{A \in \mathrm{M}(n \times n; K) \mid \det(A) = 0\}.$$

Ist M^δ auch ein Untervektorraum von $\mathrm{M}(n \times n; K)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

a) Gegeben seien $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M(n \times n, K)$ und $c \in K$. Dann gilt

$c \cdot A + B = (ca_{ij} + b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ sowie

$$\mathrm{tr}(c \cdot A + B) = \sum_{i=1}^{n} (ca_{ii} + b_{ii}) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = c \cdot \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

Alternativ: Zeige $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ und $\mathrm{tr}(c \cdot A) = c \cdot \mathrm{tr}(A)$.

b) Für $\lambda \in K$ wähle $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$, d.h. $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{falls } i = j = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ für $1 \leq i,j \leq n$. Dann gilt

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} = \lambda$. Folglich ist $tr : M(n \times n, K) \to K$ surjektiv.

c) $M^0 = \operatorname{Ker} tr = \{ A \in M(n \times n, K) \mid tr(A) = 0 \}$

Da $tr : M(n \times n, K) \to K$ eine K-lineare Abbildung ist und für solche der Kern stets ein UVR des Definitions-VR ist, ist in diesem Fall $M^0 = \operatorname{Ker} tr$ ein UVR von $M(n \times n, K)$.

Alternativ: Da $M(n \times n, K)$ ein K-VR und $M^0 \subseteq M(n \times n, K)$ ist, genügt es zu zeigen:

1) Nullmatrix liegt in M^0 oder $M^0 \neq \{\}$.

2) Für $A, B \in M^0$ gilt $A + B \in M^0$.

3) Für $A \in M^0$, $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot A \in M^0$.

d) Es gilt $M^0 = \operatorname{Ker} tr$ und daher $\dim_K M^0 = \dim_K \operatorname{Ker} tr$.

Die Dimensionsformel für die lineare Abbildung $tr: M(n \times n, K) \to K$ liefert:

$n^2 = \dim_K M(n \times n, K) = \dim_K \operatorname{Im} tr + \dim_K \operatorname{Ker} tr$

Nach b) ist $\operatorname{Im} tr = K$, denn tr ist surjektiv. Also gilt $\dim_K \operatorname{Im} tr = \dim_K K = 1$.

Folglich ist $\dim_K M^0 = \dim_K \operatorname{Ker} tr = n^2 - 1$.

e) Nein, dies ist kein UVR, da M^δ nicht abgeschlossen unter der Addition:

Gegenbeispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$ sind obere Dreiecksmatrizen $\Rightarrow$

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$ und $\det B = 0 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 0$, also $A, B \in M^\delta$.

aber $$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$ ist obere Dreiecksmatrix mit

$\det(A + B) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \neq 0 = \det A + \det B$, also $A + B \notin M^\delta$.