....

210

Lineare Algebra I: Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2017

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name: ....
  Matrikelnr.: ....

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen. Bitte heften Sie sie in diesem Fall bei der Abgabe der Klausur mit dem bereitgestellten Tacker wieder in der richtigen Reihenfolge zusammen.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Um Ihr Ergebnis zu erfahren, benötigen Sie Ihre ID-Nummer. Sie kennen diese Nummer bereits aus dem Übungsbetrieb. Ihre Nummer lautet: $\boxed{\text{ZZ9}}$

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 13x_3 - 10x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= -5 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des gegebenen inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

Sei f der bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix definierte Endomorphismus des $\mathbb{F}_5$-Vektorraums $(\mathbb{F}_5)^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{F}_5[X]$.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von f in $\mathbb{F}_5$.

(c) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenräume von f.

(d) Ist f diagonalisierbar?

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3

Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y + 2z\} \qquad\qquad V := \mathbb{R}^3$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' geordnete Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' geordnete Basen sind von V:

$$B := (\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \qquad\qquad C := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$B' := (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad\qquad C' := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(b) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_{C'} M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind. Pro Aufgabenteil können mehrere Aussagen richtig sein.

Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.

---

(1) Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so gilt für die Mächtigkeit der Vereinigung $A \cup B$:

☐ $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

☐ $|A \cup B| \geq |A| + |B|$

☐ $|A \cup B| = |M| - |A \cap B|$

(2) Eine Abbildung von Mengen $f\colon A \to B$ ist genau dann surjektiv, wenn gilt:

☐ $f^{-1}(B) = A$

☐ $f(A) = B$

☐ Jede Faser von B enthält mindestens ein Element.

(3) Welche der folgenden „Abbildungen" ist *nicht* wohldefiniert?

☐ $\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \frac{p}{q} &\mapsto \frac{p^2}{q^2} \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$

(4) Welche der folgenden Abbildungen ist bijektiv?

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) &\to \mathbb{Q} \\ (p, q) &\mapsto \frac{p}{q} \end{aligned}$

(5) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen endlichen Mengen A und B ist genau dann bijektiv, wenn

☐ A und B gleich viele Elemente besitzen und f surjektiv ist.

☐ A und B gleich viele Elemente besitzen und f injektiv ist.

☐ $A = B$ ist.

(6) Für jeden Vektorraum V ist die Teilmenge $V \setminus \{0\}$

☐ linear unabhängig.

☐ ein Erzeugendensystem.

☐ ein Untervektorraum.

(7) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x+y, -3y)$ wird bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix beschrieben:

☐ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(8) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ vom Rang $\mathrm{rk}(A) < n$

☐ besitzt 0 als Eigenwert.

☐ besitzt keine Eigenwerte.

☐ besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte.

Aufgabe 5

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $p\colon V \to V$ ist **idempotent**, falls gilt: $p \circ p = p$.

(a) Geben Sie zwei verschiedene idempotente Endomorphismen auf $V = \mathbb{R}^3$ an.

(b) Zeigen Sie, dass für jeden idempotenten Endomorphismus gilt: $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = V$.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden idempotenten Endomorphismus gilt: $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{0}\}$.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

11

Aufgabe 6

Zwei Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ heißen **äquivalent**, geschrieben $A \sim A'$, wenn es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times m)$ und $T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gibt, sodass gilt:

$$A' = S^{-1}AT$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Relation $\sim$ auf $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Ihre Antwort sollte von n und m abhängen. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: