Heinrich-Heine-Universität
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

Sommersemester 2017
28.06.2017

Lineare Algebra I
Blatt 11

1 | Bitte wenden

Welche der folgenden reellen Matrizen sind invertierbar? Mit welchen Inversen?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & \frac{13}{2} \\ -\frac{18}{13} & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2 | Jetzt wechseln!

Sei $V := \{(x \quad y \quad z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $W := \mathbb{R}^2$. Die folgenden Tupel B und B' bzw. C und C' sind jeweils geordnete Basen von V bzw. W:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Sei $f\colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen B' und C'?

3 | Babel

Seien $\mathtt{OL}$, $\mathtt{UL}$, $\mathtt{OR}$ und $\mathtt{UR}$ die folgenden Matrizen:

$$\mathtt{OL} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{OR} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{UL} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{UR} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als geordnete Basis des Vektorraums aller reellen 2×2-Matrizen wählt …

… Hans das Tupel $(\mathtt{OL}, \mathtt{OR}, \mathtt{UL}, \mathtt{UR})$,
Jaël das Tupel $(\mathtt{OR}, \mathtt{OL}, \mathtt{UR}, \mathtt{UL})$,
Sakura das Tupel $(\mathtt{OR}, \mathtt{UR}, \mathtt{OL}, \mathtt{UL})$ und
Hunapú das Tupel $(\mathtt{OL} - \mathtt{UR}, \mathtt{OR}, \mathtt{UL}, \mathtt{OL} + \mathtt{UR})$.

Das sind in der Tat allesamt Basen. Mit welcher 4×4-Matrix würden Hans, Jaël, Sakura und Hunapú jeweils die Transpositionsabbildung $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ beschreiben?

4 | Tippelschritte

Ist $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine geordnete Basis eines K-Vektorraums V, so sind auch diejenigen Tupel eine geordnete Basis von V, die man erhält, indem man für beliebige verschiedene $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

(I) $\mathbf{v}_i$ und $\mathbf{v}_j$ vertauscht, oder
(II) $\mathbf{v}_i$ durch $s\mathbf{v}_i$ für ein $s \in K^\times$ ersetzt, oder
(III) $\mathbf{v}_i$ durch $\mathbf{v}_i + s\mathbf{v}_j$ ersetzt, für ein beliebiges $s \in K$.

Bitte versehen Sie jede Lösung mit Namen, Übungsgruppen- und **ID-Nummer** und werfen Sie sie bis zum 05.07.2017, 10:30 Uhr in den für die jeweilige Aufgabe vorgesehenen Briefkasten ein (Etage 25.22.00).