Heinrich-Heine-Universität
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

Sommersemester 2017
14.06.2017

Lineare Algebra I
Blatt 9

---

1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f, g, h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z - 3w \\ y - 3w \end{pmatrix}$$

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}$$

2 | Spindel

Welche reellen 2×2-Matrizen kommutieren mit allen anderen reellen 2×2-Matrizen? Das heißt, für welche $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ gilt: $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

3 | Stufen

Die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ist bezüglich der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum – siehe Vorlesung, Beispiel (d) nach Notiz 4.2 oder den Beweis zu Satz 6.5. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende Abbildung:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n \\ 1 & \text{falls } x \geqslant n \end{cases}$$

Ist die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ aller dieser Abbildungen linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Ist sie ein Erzeugendensystem?

4 | Fahnen

Eine *Fahne der Länge d* in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d$. Ist V endlich-dimensional, so ist die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V.

Notation: $A \subsetneq B$ bedeutet ($A \subseteq B$ aber $A \neq B$).

Bitte versehen Sie jede Lösung mit Namen, Übungsgruppen- und **ID-Nummer** und werfen Sie sie bis zum 21.06.2017, 10:30 Uhr in den für die jeweilige Aufgabe vorgesehenen Briefkasten ein (Etage 25.22.00).