Heinrich-Heine-Universität
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

Sommersemester 2017
07.06.2017

Lineare Algebra I
Blatt 8

---

1 | Suchbild

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear? Welche Dimension haben für die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen jeweils Kern und Bild?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} \qquad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ y-2 \end{pmatrix} \qquad j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

In den positiven Fällen können Sie auf einen Nachweis der Linearität in dieser Aufgabe ausnahmsweise verzichten. In den negativen Fällen sollten Sie aber die Nicht-Linearität nachweisen.

2 | Verpackungswahn

Seien V und W Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subset W$ Teilmengen, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $\langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$

(b) $\langle M \cap N\rangle = \langle M\rangle \cap \langle N\rangle$

(c) $\langle f(M)\rangle = f(\langle M\rangle)$

(d) $\langle f^{-1}(O)\rangle = f^{-1}(\langle O\rangle)$

3 | Auf und Ab

Die *formale Ableitung* eines Polynoms $A = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ ist gegeben durch $A' := \sum_{i\geqslant 1} i a_i X^{i-1}$. Die Zuordnung $A \mapsto A'$ definiert auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ einen Endomorphismus. Welchen Kern und welches Bild hat dieser Endomorphismus?

4 | Projektion

Sei $p\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V mit $p \circ p = p$.

(a) Gibt es einen derartigen Endomorphismus auf $V = \mathbb{R}^3$?

(b) Für jeden solchen Endomorphismus gilt: $\ker(p) + \operatorname{im}(p) = V$ und $\ker(p) \cap \operatorname{im}(p) = \{\mathbf{0}\}$. Insbesondere folgt also nach Aufgabe 3 auf Blatt 6:

$$V \cong \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p).$$

Auch für eine Lösung, in der V als endlich-dimensional vorausgesetzt wird, erhalten Sie in dieser Aufgabe einen Teil der Punkte. Tatsächlich ist diese Voraussetzung an V jedoch wenig hilfreich.

Bitte versehen Sie jede Lösung mit Namen, Übungsgruppen- und **ID-Nummer** und werfen Sie sie bis zum 14.06.2017, 10:30 Uhr in den für die jeweilige Aufgabe vorgesehenen Briefkasten ein (Etage 25.22.00).