

Lineare Algebra I

Blatt 5

1 | Polynomdivision

Für welche der folgenden Paare von Polynomen A, B existiert in $\mathbb{Z}[X]$ eine Darstellung $A = QB + R$ mit $\deg(R) < \deg(B)$? Wie lauten in diesen Fällen Q und R ?

- (a) $A = X^7 + 3X^5 + 7X^4 + X^3 + X + 1, \quad B = X^3 + X + 1$
(b) $A = X^3 + X + 1, \quad B = X^7 + 3X^5 + 6$
(c) $A = X^8 + 4X^7 + 7X^4 - X^3 - X^2 - 1, \quad B = -X^2 + X - 1$
(d) $A = X^8 + 4X^7 + 7X^4 - X^3 - X^2 - 1, \quad B = 2X^2 - 2X + 2$

Alle diese Polynome lassen sich auch als Elemente von $\mathbb{Q}[X]$ auffassen. Ändert sich dadurch etwas?

2 | Restrukturierung

Wie viele Abbildungen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gibt es? Wie viele Gruppenhomomorphismen? Wie viele Ringhomomorphismen?

3 | Gaußsche Zahlen

Die Teilmenge $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von \mathbb{C} : die Addition und die Multiplikation in \mathbb{C} lassen sich auf $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ einschränken, und ausgestattet mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein Ring.

Eine Zahl $z \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ist genau dann in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ eine Einheit, also invertierbar bezüglich der Multiplikation, wenn $\|z\| = 1$ ist. Wie viele Einheiten gibt es in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$? Zu welcher aus der Vorlesung bekannten Gruppe ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}[\mathbf{i}])^\times$ isomorph?

4 | Millimeterarbeit

Zu je zwei teilerfremden Zahlen $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existieren Koeffizienten $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt:

$$xm + yn = 1$$

Das kann man zum Beispiel auf die folgende Weise sehen.

¹ Es gibt eine Abbildung $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$, die $([x], [y])$ auf $[xm + yn]$ abbildet.

² Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus.

³ Sie ist für teilerfremde m, n injektiv.

⁴ Sie definiert für teilerfremde m, n sogar einen Gruppenisomorphismus.

Wieso folgt nun die Behauptung? Wie können die Koeffizienten x und y zum Beispiel für $n = 13$ und $m = 17$ gewählt werden?

Bitten werfen Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Briefkästen in Gebäude 25.22., Etage 00, ein. Es gibt für jede Aufgabe einen separaten Briefkasten. Versehen Sie jede Lösung mit Ihrem Namen, der Nummer Ihrer Übungsgruppe und mit Ihrer **ID-Nummer**. Abgabefrist: 24.5.2017, 10:30 Uhr.