17 Multilineare Algebra

Prolog: Universelle Eigenschaften (UE)

Konstruktionen mathematischer Objekte lassen sich oft durch die Menge aller Abbildungen charakterisieren, die auf ihnen (oder zu ihnen) definiert sind. Ich werde das hier nur kurz an Beispielen illustrieren, ohne auf die allgemeine Theorie einzugehen.

17.1 Beispiel:

Seien M_1, M_2 Mengen. Es gibt eine Menge $\boxed{M_1M_2}$ zusammen mit Abbildungen

$$M_1 \xrightarrow{i_1} \boxed{M_1M_2} \xleftarrow{i_2} M_2,$$

die folgende UE besitzt:

Für jede Menge T und jedes Paar von Abbildungen $M_1 \xrightarrow{t_1} T \xleftarrow{t_2} M_2$ existiert genau eine Abbildung $\boxed{M_1M_2} \xrightarrow{\boxed{t_1t_2}} T$ mit

$\boxed{t_1t_2} \circ i_1 = t_1$ und $\boxed{t_1t_2} \circ i_2 = t_2$:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\forall t_1"'] & \boxed{M_1M_2} \arrow[d, "\exists!\,\boxed{t_1t_2}"] & M_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\forall t_2"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Wähle $\boxed{M_1M_2} := M_1 \sqcup M_2$ (Def. 1.12)

$$= \{(m,j) \mid j \in \{1,2\},\ m \in M_j\}$$

zusammen mit den kanonischen Inklusionen

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xhookrightarrow{i_1} & M_1 \sqcup M_2 & \hookleftarrow & M_2 . \\ m & \mapsto & (m,1) & & \\ & & (m,2) & \mapsfrom & m \end{array}$$

Sind T, t_1, t_2 gegeben, so definiere $\boxed{t_1t_2}$ durch

$$\boxed{t_1t_2}(m,j) := t_j(m).$$

Dann ist $\quad \boxed{t_1t_2} \circ i_j(m) = t_j(m)$ für alle $m \in M_j$.

Ist $\boxed{t_1t_2}'$ weitere Abbildung mit

$$\boxed{t_1t_2}' \circ i_j(m) = t_j(m) \text{ für alle } m \in M_j,$$

so folgt $\quad \boxed{t_1t_2}'(m,j) = t_j(m)$, also $\boxed{t_1t_2}' = \boxed{t_1t_2}$.

$\square$

17.2 Notiz:

Die UE bestimmt $\boxed{M_1M_2}$ bis auf eindeutige Isomorphie: erfüllt

$$M_1 \xrightarrow{i_1'} \boxed{M_1M_2}' \xleftarrow{i_2'} M_2$$

ebenfalls obige UE, so existiert genau ein Isomorphismus von Mengen (d.h.: eine Bijektion) $\boxed{M_1M_2} \xrightarrow{\cong} \boxed{M_1M_2}'$, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{M_1M_2} \arrow[d, "\cong"] & \\ M_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_1'"'] & & M_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "i_2'"] \\ & \boxed{M_1M_2}' & \end{tikzcd}$$

Beweis:

Wegen der Eindeutigkeit in der UE kann es höchstens einen solchen Isomorphismus geben. Wir konstruieren einen wie folgt.

Wegen der UE von $\boxed{M_1 M_2}$ $\exists\ \boxed{\tilde{i}_1' \ \tilde{i}_2'}$, sodass

$$\begin{tikzcd} & \boxed{M_1 M_2} \arrow[dd, "\boxed{\tilde{i}_1' \ \tilde{i}_2'}"'] & \\ M_1 \arrow[ur, "\tilde{i}_1"] \arrow[dr, "\tilde{i}_1'"'] & & M_2 \arrow[ul, "\tilde{i}_2"'] \arrow[dl, "\tilde{i}_2'"] \\ & \boxed{M_1 M_2}' & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wegen der UE von $\boxed{M_1 M_2}'$ $\exists\ \boxed{\tilde{i}_1 \ \tilde{i}_2}$, sodass

$$\begin{tikzcd} & \boxed{M_1 M_2}' \arrow[dd, "\boxed{\tilde{i}_1 \ \tilde{i}_2}"'] & \\ M_1 \arrow[ur, "\tilde{i}_1'"] \arrow[dr, "\tilde{i}_1"'] & & M_2 \arrow[ul, "\tilde{i}_2'"'] \arrow[dl, "\tilde{i}_2"] \\ & \boxed{M_1 M_2} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Betrachte nun:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{M_1 M_2} \arrow[dd, dotted, "f"] & \\ M_1 \arrow[ur, "\tilde{i}_1"] \arrow[dr, "\tilde{i}_1"'] & & M_2 \arrow[ul, "\tilde{i}_2"'] \arrow[dl, "\tilde{i}_2"] \\ & \boxed{M_1 M_2} & \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert offensichtlich für $f = \mathrm{id}$. Es kommutiert aber nach unserer Konstruktion auch für $f = \boxed{\tilde{i}_1 \ \tilde{i}_2} \circ \boxed{\tilde{i}_1' \ \tilde{i}_2'}$. Aus der Eindeutigkeit in der UE von $\boxed{M_1 M_2}$ folgt daher

$$\boxed{\tilde{i}_1 \ \tilde{i}_2} \circ \boxed{\tilde{i}_1' \ \tilde{i}_2'} = \mathrm{id}.$$

Analog sieht man:

$$\boxed{\tilde{i}_1' \ \tilde{i}_2'} \circ \boxed{\tilde{i}_1 \ \tilde{i}_2} = \mathrm{id}.$$

Also definieren $\boxed{\tilde{i}_1 \ \tilde{i}_2}$ & $\boxed{\tilde{i}_1' \ \tilde{i}_2'}$ zueinander inverse Isomorphismen. $\square$

Notation: Natürlich schreiben wir in Zukunft wieder $M_1 \amalg M_2$ statt $\boxed{M_1 M_2}$.

17.3 Beispiel:

Seien V_1, V_2 K-Vektorräume. Es gibt einen K-VR $\boxed{V_1 V_2}$ zusammen mit linearen Abbildungen

$$V_1 \xrightarrow{i_1} \boxed{V_1 V_2} \xleftarrow{i_2} V_2 ,$$

der folgende UE besitzt:

Für jeden K-VR T und jedes Paar linearer Abbildungen $V_1 \xrightarrow{t_1} T \xleftarrow{t_2} V_2$ existiert genau eine lineare Abbildung $\boxed{V_1 V_2} \xrightarrow{\boxed{t_1 t_2}} T$ mit $\boxed{t_1 t_2} \circ i_1 = t_1$ und $\boxed{t_1 t_2} \circ i_2 = t_2$:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\forall t_1"'] & \boxed{V_1 V_2} \arrow[d, "\exists! \boxed{t_1 t_2}"] & V_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\forall t_2"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Def. 4.19

Beweis: Wähle $\boxed{V_1 V_2} := V_1 \oplus V_2 \quad (= V_1 + V_2)$

$$= \{ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \mid \underline{v}_1 \in V_1, \underline{v}_2 \in V_2 \}$$

zusammen mit den kanonischen Inklusionen

$$V_1 \xrightarrow{i_1} \boxed{V_1 V_2} \xleftarrow{i_2} V_2$$

$$\underline{v} \longmapsto (\underline{v}, \underline{0})$$

$$(\underline{0}, \underline{v}) \longleftarrow \underline{v}$$

Sind T, t_1, t_2 gegeben, so definiere $\boxed{t_1 t_2}$ durch

$$\boxed{t_1 t_2} (\underline{v}_1, \underline{v}_2) := t_1(\underline{v}_1) + t_2(\underline{v}_2) \quad \in T$$

Dann ist (1) $\boxed{t_1 t_2}\, i_1(\underline{v}) = t_1(\underline{v}) + t_2(\underline{0}) = t_1(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V_1,$

(2) $\boxed{t_1 t_2}\, i_1(\underline{v}) = \ldots = t_2(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V_2.$

Ferner ist $\boxed{t_1 t_2}$ durch (1) & (2) eindeutig festgelegt, denn die Vektoren der Form $(\underline{v}, \underline{0})$ und $(\underline{0}, \underline{v})$ erzeugen $V_1 \oplus V_2$. $\square$

Wieder legt die UE $\boxed{V_1 V_2}$ bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig fest.

Notation: In Zukunft wieder $V_1 \oplus V_2$ statt $\boxed{V_1 V_2}$.

17.4 Beispiel:

V K-Vektorraum, $U \leq V$ UVR. Es gibt einen K-VR V/U zusammen mit einer linearen Abb.

$$V \xrightarrow[q]{} V/U$$

mit folgender UE: $q|_U = 0$, und für jeden K-VR T und jede lineare Abbildung

$$t: V \longrightarrow T,$$

mit $t|_U = 0$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$t: V/U \longrightarrow T$$

mit $t \circ q = t$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & V \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\forall t"'] & V/U \arrow[d, "\exists!\, t"] \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Beweis:

Wähle $V/U := V/U$ (Def. 4.23)

zusammen mit der kanonischen Projektion

$$q: V \longrightarrow V/U$$
$$\underline{v} \longmapsto [\underline{v}]$$

Notiz 4.24: $[\underline{v}] = [\underline{v}']$ in V/U $\iff$ $\underline{v} - \underline{v}' \in U$.

Also offenbar

$$q(\underline{u}) = [\underline{u}] = [\underline{0}] \quad \text{für alle } \underline{u} \in U.$$

Ist $t : V \longrightarrow T$ gegeben mit $t(\underline{u}) = \underline{0}$ für alle $\underline{u} \in U$, so definiere

$$\textcircled{t} : V/U \longrightarrow T$$
$$[\underline{v}] \longmapsto t(\underline{v})$$

Das ist wohldefiniert, denn

$$[\underline{v}] = [\underline{v}'] \Rightarrow \underline{v} - \underline{v}' \in U$$
$$\Rightarrow t(\underline{v} - \underline{v}') = \underline{0}$$
$$\Rightarrow t(\underline{v}) = t(\underline{v}')$$

Ferner $\textcircled{t}$ linear und (*) $\textcircled{t} \circ q = t$.

Außerdem ist $\textcircled{t}$ durch (*) eindeutig festgelegt (z.B. weil q surjektiv ist). $\square$