

17 Multilineare Algebra

Prolog: Universelle Eigenschaften (UE)

Konstruktionen mathematischer Objekte lassen sich oft durch die Menge aller Abbildungen charakterisieren, die auf ihnen (oder zu ihnen) definiert sind. Ich werde das hier nur kurz an Beispielen illustrieren, ohne auf die allgemeine Theorie einzugehen.

17.1 Beispiel:

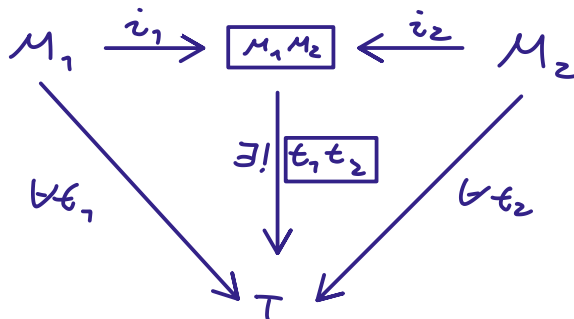
Seien M_1, M_2 Mengen. Es gibt eine Menge $\boxed{M_1 M_2}$ zusammen mit Abbildungen

$$M_1 \xrightarrow{i_1} \boxed{M_1 M_2} \xleftarrow{i_2} M_2,$$

die folgende UE besitzt:

Für jede Menge T und jedes Paar von Abbildungen $M_1 \xrightarrow{t_1} T \xleftarrow{t_2} M_2$ existiert genau eine Abbildung $\boxed{M_1 M_2} \xrightarrow{\boxed{t_1 t_2}} T$ mit

$$\boxed{t_1 t_2} \circ i_1 = t_1 \quad \text{und} \quad \boxed{t_1 t_2} \circ i_2 = t_2:$$



Beweis: Wähle $\boxed{M_1 M_2} := M_1 \sqcup M_2$ (Def. 1.72)
 $= \{(m, j) \mid j \in \{1, 2\}, m \in M_j\}$

zusammen mit den kanonischen Inklusionen

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{i_1} & M_1 \sqcup M_2 \xleftarrow{i_2} M_2 \\ m & \mapsto & (m, 1) \qquad (m, 2) \leftarrow m \end{array}$$

Sind T, t_1, t_2 gegeben, so definiere $\boxed{t_1 t_2}$ durch

$$\boxed{t_1 t_2}(m, j) := t_j(m).$$

Dann ist $\boxed{t_1 t_2} \circ i_j(m) = t_j(m)$ für alle $m \in M_j$.

Ist $\boxed{t_1 t_2}'$ weitere Abbildung mit

$$\boxed{t_1 t_2}' \circ i_j(m) = t_j(m) \text{ für alle } m \in M_j,$$

so folgt $\boxed{t_1 t_2}'(m, j) = t_j(m)$, also $\boxed{t_1 t_2}' = \boxed{t_1 t_2}$. □

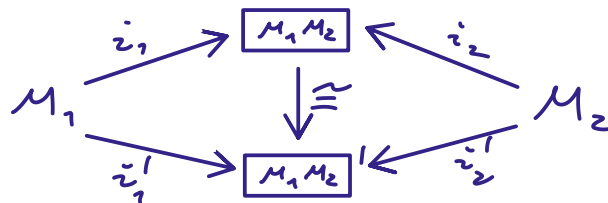
17.2 Notiz:

Die UE bestimmt $\boxed{M_1 M_2}$ bis auf eindeutige Isomorphie: erfüllt

$$M_1 \xrightarrow{i_1'} \boxed{M_1 M_2}' \xleftarrow{i_2'} M_2$$

ebenfalls obige UE, so existiert genau ein Isomorphismus von Mengen (d.h.: eine Bijektion)

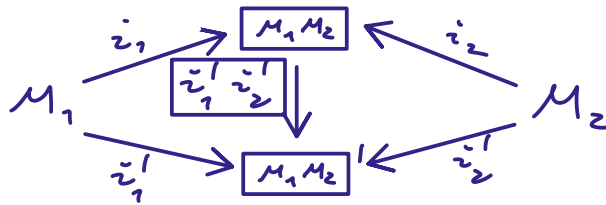
$\boxed{M_1 M_2} \xrightarrow{\cong} \boxed{M_1 M_2}'$, für die das folgende Diagramm kommutiert:



Beweis:

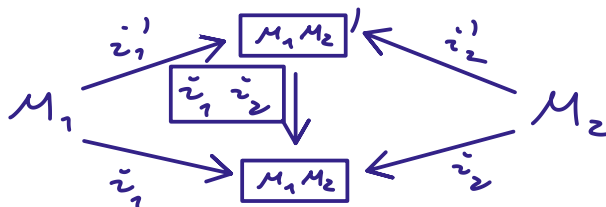
Wegen der Eindeutigkeit in der UE kann es höchstens einen solchen Isomorphismus geben. Wir konstruieren einen wie folgt.

Wegen der \mathcal{U} von $\boxed{M_1 M_2} \ni \boxed{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}$, sodass



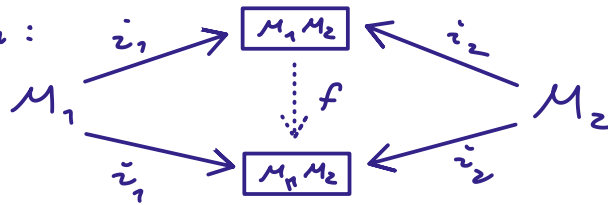
Kommutiert.

Wegen der \mathcal{U} von $\boxed{M_1 M_2}' \ni \boxed{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}$, sodass



Kommutiert.

Betrachte nun:



Dieses Diagramm kommutiert offensichtlich für $f = \text{id}$. Es kommutiert aber nach unserer Konstruktion auch für $f = \boxed{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2} \circ \boxed{\tilde{z}_1' \tilde{z}_2'}$. Aus der Eindeutigkeit in der \mathcal{U} von $\boxed{M_1 M_2}$ folgt daher

$$\boxed{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2} \circ \boxed{\tilde{z}_1' \tilde{z}_2'} = \text{id}.$$

Analog sieht man:

$$\boxed{\tilde{z}_1' \tilde{z}_2'} \circ \boxed{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2} = \text{id}.$$

Also definieren $\boxed{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}$ & $\boxed{\tilde{z}_1' \tilde{z}_2'}$ zueinander inverse Isomorphismen. □

Notation: Natürlich schreiben wir in Zukunft wieder $M_1 \perp M_2$ statt $\boxed{M_1 M_2}$.

17.3 Beispiel:

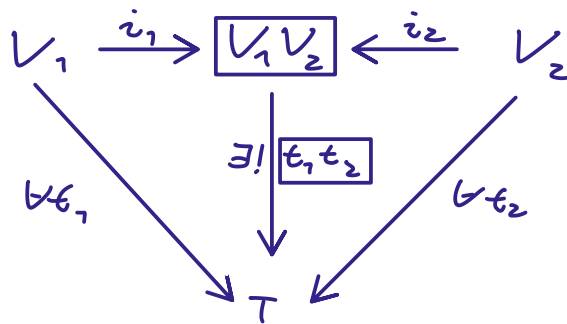
Seien V_1, V_2 K -Vektorräume. Es gibt einen K -VR $V_1 V_2$ zusammen mit linearen Abbildungen

$$V_1 \xrightarrow{i_1} V_1 V_2 \xleftarrow{i_2} V_2,$$

der folgende \mathcal{L} besitzt:

Für jeden K -VR T und jedes Paar linearer Abbildungen $V_1 \xrightarrow{t_1} T \xleftarrow{t_2} V_2$ existiert genau eine lineare Abbildung $V_1 V_2 \xrightarrow{t_1 t_2} T$ mit

$$t_1 t_2 \circ i_1 = t_1 \quad \text{und} \quad t_1 t_2 \circ i_2 = t_2:$$



Def. 4.19

Beweis: Wähle $V_1 V_2 := V_1 \oplus V_2 (= V_1 + V_2)$
 $= \{(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \mid \underline{v}_1 \in V_1, \underline{v}_2 \in V_2\}$

Zusammen mit den kanonischen Inklusionen

$$V_1 \xrightarrow{i_1} V_1 V_2 \xleftarrow{i_2} V_2$$

$$\underline{v} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{v} \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \underline{v}$$

Sind T, t_1, t_2 gegeben, so definiere $t_1 t_2$ durch

$$t_1 t_2 (\underline{v}_1, \underline{v}_2) := t_1(\underline{v}_1) + t_2(\underline{v}_2) \in T$$

Dann ist (1) $t_1 t_2 \circ i_1(\underline{v}) = t_1(\underline{v}) + t_2(0) = t_1(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V_1,$

$$(2) \quad t_1 t_2 \circ i_2(\underline{v}) = \dots = t_2(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V_2.$$

Ferner ist $t_1 t_2$ durch (1) & (2) eindeutig festgelegt, denn die Vektoren der Form $(\underline{v}, 0)$ und $(0, \underline{v})$ erzeugen $V_1 \oplus V_2$. □

Wieder legt die $\mathcal{L}E$ $\boxed{V_1 V_2}$ bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig fest.

Notation: In Zukunft wieder $V_1 \oplus V_2$ statt $\boxed{V_1 V_2}$.

17.4 Beispiel:

V K -Vektorraum, $U \subseteq V$ U VR. Es gibt einen K -VR $\textcircled{V_U}$ zusammen mit einer linearen Abb.

$$V \xrightarrow{q} \textcircled{V_U}$$

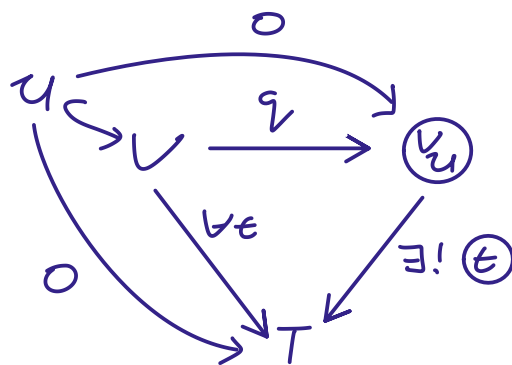
mit folgender $\mathcal{L}E$: $q|_U = 0$, und für jeden K -VR T und jede lineare Abbildung

$$t: V \longrightarrow T,$$

mit $t|_U = 0$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$\textcircled{t}: \textcircled{V_U} \longrightarrow T$$

mit $\textcircled{t} \circ q = t$.



Beweis:

Wähle $\textcircled{V_U} := V/U$ (Def. 4.23)

zusammen mit der kanonischen Projektion

$$q: V \longrightarrow \textcircled{V_U}$$

$$\underline{v} \longmapsto [\underline{v}]$$

Notiz 4.24: $[v] = [v']$ in (V/U) $\Leftrightarrow v - v' \in U$.

Also offenbar

$$q(v) = [v] = [0] \quad \text{für alle } v \in U.$$

Ist $t: V \longrightarrow T$ gegeben mit $t(v) = 0$

für alle $v \in U$, so definiere

$$\textcircled{t}: (V/U) \longrightarrow T$$

$$[v] \mapsto t(v)$$

Das ist wohldefiniert, denn

$$[v] = [v'] \Rightarrow v - v' \in U$$

$$\Rightarrow t(v - v') = 0$$

$$\Rightarrow t(v) = t(v')$$

Ferner \textcircled{t} linear und $(*) \textcircled{t} \circ q = t$.

Außerdem ist \textcircled{t} durch $(*)$ eindeutig festgelegt
(z.B. weil q surjektiv ist). □