14 Minimalpolynome

V VR über K

$V \circlearrowleft f$ Endomorphismus

$\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V,V)$ mit Addition & Komposition ist Ring (vgl. Korollar 6.10 (b) für $V = K^n$)

14.1 Notation: Für $A = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \in K[X]$ ist

$$A(f) := \sum_{i=1}^{n} a_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$$

$\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{i}$; $f^0 = \mathrm{id}$

Beispiel:

① $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$

$A := X^2 - 3X + 2$

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$

$A := X - 2$

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.2 Notiz: Die Abb.

$$K[X] \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$$
$$A \longmapsto A(f)$$

ist ein Ringhomomorphismus, und als solcher eindeutig festgelegt durch

$$X \longmapsto f$$

Da $K[X]$ kommutativ ist, folgt insbesondere:

14.3 Notiz: Für beliebige Polynome $A, B \in K[X]$ ist
$$A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f)$$

$\boxed{\text{Ab jetzt } V \text{ endlich-dim.}}$

14.4 Def.: Das *Minimalpolynom* von $f \in V$ ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$, für das gilt:

(M1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung $\in \mathrm{End}_K(V)$)

(M2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (M1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(M3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

(Randfall: Aus der Definition ergibt sich:
$$\mu_0 = \begin{cases} 1 & \text{falls } \dim V = 0 \\ X & \text{falls } \dim V > 0 \end{cases}$$
)

14.5 Notiz: μ_f ist wirklich eindeutig.

(Sind $\mu_f \neq \tilde{\mu}_f$ zwei verschiedene Kandidaten, so ist wegen (M2) $\deg \mu_f = \deg \tilde{\mu}_f$, und für
$$\Delta := \mu_f - \tilde{\mu}_f \neq 0$$
gilt wegen (M3): $\deg(\Delta) < \deg \mu_f$.

Andererseits erfüllt Δ (M1). $\Big\}$ $\lightning$ (M2) für μ_f)

14.6 Notiz: μ_f teilt jedes $P \in K[X]$ mit $P(f)=0$.
(Division mit Rest: $P = Q\cdot\mu_f + R$ mit $R=0$ oder $\deg \mu_f < \deg R$.

Auswertung an f: $R(f) = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$.
Also ist $R=0$ wegen Minimalität von μ_f.)

Für Existenz von μ_f reicht es zu zeigen, dass irgendein Polynom existiert, dass (M1) erfüllt. Wir werden zeigen:

14.7 Satz von Cayley-Hamilton
Für das charakteristische Polynom χ_f eines Endomorphismus f eines endlich-dim. VRs gilt:
$$\chi_f(f) = 0.$$

Beispiele:

①: $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$

$$\chi_f = \det\begin{pmatrix} 2-X & 3 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (2-X)(1-X) = X^2 - 3X + 2$$

$\chi_f(f) = 0$ — siehe Beispiel ① oben.)
(Tatsächlich ist hier $\chi_f = \mu_f$.)

② $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$

$\chi_f = (2-X)^2$
(Hier ist $\mu_f = 2-X \neq \chi_f$).

„Erster Beweis" des Satzes von Cayley-Hamilton:

$\chi_f(X) = \det(f - X\cdot \mathrm{id})$, also

$\chi_f(f) \overset{(*)}{=} \det(f-f) = \det(0) = 0.$

Das ist **falsch**, weil im Schritt $(*)$ die Reihenfolge von „det" und „$X \mapsto f$" vertauscht ist.

$$\begin{tikzcd}
f - X\cdot\mathrm{id} \arrow[r, mapsto] & \chi_f \arrow[r, mapsto] & \chi_f(f) \\
\mathrm{End}_K(V)[X] \left(\cong \mathrm{Mat}_{K[X]}(n\times n)\right) \arrow[r, "\det"] \arrow[dr, "X\mapsto f"'] & K[X] \arrow[r, "X\mapsto f"] & \mathrm{End}_K(V) \\
& \mathrm{End}_K(V) \left(\cong \mathrm{Mat}_K(n\times n)\right) \arrow[r, "\det"] & K \\
f - X\cdot\mathrm{id} \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

Richtiger Beweis (unten, nach Lemma 14.16) braucht etwas Vorarbeit. Idee:

Teile & herrsche!

Schneide aus V „zyklische" UVR W heraus …

… und beweise Cayley-Hamilton für $f|_W$ durch einfaches Nachrechnen!

14.8 Def:

Ein UVR $W \subseteq V$ ist *f-zyklisch*, falls $W = \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots \rangle$ für ein $\underline{w} \in V$.

14.9 Notiz: f-zyklische UVR sind f-stabil.

14.10 Lemma: Ist $W = \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots \rangle$ ein endlich-dim. f-zyklischer UVR der Dimension d, so ist $(\underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots, f^{d-1}(\underline{w}))$ eine Basis von W.

Beweis:

Sei j maximal mit der Eigenschaft, dass

$$(\underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots, f^{j-1}(\underline{w}))$$

linear unabhängig ist;

$$W' := \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots, f^{j-1}(\underline{w}) \rangle.$$

Dann ist also $f^j(\underline{w}) = \sum_{i=0}^{j-1} a_i f^i(\underline{w}) \in W'$,

somit auch $f^{j+1}(\underline{w}) = f(f^j(\underline{w})) \in W'$,

und induktiv $f^n(\underline{w}) \in W'$ $\forall n$.

Also $W' = W$, $\dim W = j$.

$\square$

14.11 Def: Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

14.12 Satz: f G V

Ein UVR $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch, wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Beweis:

($\Rightarrow$) Wähle zu $W = \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \ldots \rangle$ die Basis aus Lemma 14.11 und für $A \in K[X]$ die Koeffizienten aus

$$f^d(\underline{w}) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i(\underline{w})$$

(vgl. Beweis zu Lemma 14.10; wir haben lediglich Vorzeichen von a_i geändert.

($\Leftarrow$) $W = \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \ldots \rangle$ für $\underline{w}$:= erster Basisvektor.

$\square$

14.13 Satz (Cayley-Hamilton im zyklischen Fall): $V \circlearrowleft f$. Ist $W \subseteq V$ f-zyklisch, so ist

$$(-1)^{\dim W} \cdot \chi_{f|_W}$$

ein Minimalpolynom für $f|_W$.

Beweis:

Wähle Basis $(\underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots, f^{d-1}(\underline{w}))$ von W wie in Lemma 14.10. In dieser Basis wird f dargestellt durch Begleitmatrix zu einem Polynom

$$A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \qquad (*)$$

dessen Koeffizienten definiert sind durch

$$f^d(\underline{w}) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i(\underline{w}) = 0 \qquad (**)$$

1. Behauptung: A ist Minimalpolynom zu $f|_W$.

Beweis:

(M1) Vergleich von $(*)$ & $(**)$ zeigt:

$$A(f)(\underline{w}) = \underline{0}.$$

Da $f (= X(f))$ mit $A(f)$ kommutiert, folgt:

$$A(f)(f^i(\underline{w})) = f^i(A(f)(\underline{w})) = f^i(\underline{0}) = \underline{0}$$

für alle i. Somit $A(f|_W) = 0$.

(M2) Für jedes Polynom $P \neq 0$ mit $\deg P < d$ ist $P(f|_W) \neq 0$, denn $P(f)(\underline{w}) \neq 0$, denn

$$\underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \dots, f^{d-1}(\underline{w})$$

sind nach Lemma 14.10 linear unabhängig.

(M3) A normiert ✓

2. Behauptung: $\chi_{f|W} = (-1)^d \cdot A$

Beweis durch Induktion über $d = \dim W$:

IA: $d = 1$, $W = \langle \underline{w} \rangle$ mit Basis $(\underline{w})$

$$f(\underline{w}) = a_0 \cdot \underline{w} \mathrel{\hat{=}} \text{Matrix } (a_0)$$

$$A = X - a_0.$$

$$\chi_{f|W} = \det(a_0 - X) = (-1) \cdot A$$

IS:

$$\chi_{f|W} = \det \begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X & -a_{d-2} \\ 0 & & 0 & & 1 & -X-a_{d-1} \end{pmatrix}$$

$$= -X \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & -X & & & -a_2 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -X & -a_{d-2} \\ & & & 1 & -X-a_{d-1} \end{pmatrix}}_{(-1)^{d-1}\left(X^{d-1} + a_{d-1} X^{d-2} + \dots + a_1\right)}$$

Entwicklung nach erster Spalte

$$- \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & & & -a_2 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -X & -a_{d-2} \\ & & & 1 & -X-a_{d-1} \end{pmatrix}}_{(-1)^d (-a_0)}$$

Entwicklung nach erster Zeile

$= (-1)^d (X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0) = (-1)^d \cdot A.$ $\square$

Für Beweis des allgemeinen Satzes fehlt nur noch eine Zutat.

14.14 Konstruktion: f GV

Für ein f-stabilen UVR $W \subseteq V$ ist

$$\bar{f}: V/W \longrightarrow V/W$$
$$[\underline{v}] \longmapsto [f(\underline{v})]$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von V/W.

($[\underline{v}] = [\underline{v}']$ in V/W

$\Leftrightarrow \underline{v} - \underline{v}' \in W$

$\Rightarrow f(\underline{v} - \underline{v}') \in W$ da W f-stabil

$\Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{v}') \in W$

$\Leftrightarrow [f(\underline{v})] = [f(\underline{v}')]$ in V/W.)

14.15 Lemma: Für einen f-stabilen UVR $W \subseteq V$ und $\bar{f}$ wie in 14.14 ist

$$\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{\bar{f}}$$

Beweis:

Wähle Basis $B_W = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell)$ von W und ergänze zu Basis $B = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_{\ell+1}, \dots, \underline{v}_n)$ von V.

Dann ist $\bar{B} := ([\underline{v}_{\ell+1}], \dots, [\underline{v}_n])$ Basis von V/W

(siehe Beweis zu Dimensionsformel 5.14 (6): $\dim V/W = \dim V - \dim W$)

Schreibe $M := {}_{B_W}M_{B_W}(f|_W)$

$\bar{M} := {}_{\bar{B}}M_{\bar{B}}(\bar{f})$

Dann ist
$$ {}_BM_B(f) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{\ell} & \end{array} \\ \ell\left\{\right. & \left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline 0 & \bar{M} \end{array}\right) \end{array} .$$

Somit folgt:
$$\chi_f = \det \left(\begin{array}{c|c} M - X\cdot 1\!\!1_\ell & * \\ \hline 0 & \bar{M} - X \cdot 1\!\!1_{n-\ell} \end{array}\right)$$
$$= \det(M - X\cdot 1\!\!1_\ell)\cdot \det(\bar{M} - X\cdot 1\!\!1_{n-\ell})$$
$$= \chi_{f|_W} \cdot \chi_{\bar{f}}$$

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$ (Blatt 2, Aufgabe 4) $\square$

Beweis von Satz 14.7 (Cayley-Hamilton):

VDf. Es reicht zu zeigen: für jedes $\underline{w} \in V$ ist
$$\chi_f(f)(\underline{w}) = \underline{0}.$$
Betrachte dazu $W := \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \ldots\rangle$. Nach Lemma 14.15 ist
$$\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{\bar{f}},$$
und nach Satz 14.13 ist $\chi_{f|_W}(f)(\underline{w}) = \underline{0}$.

Also ist auch $\chi_f(f)(\underline{w}) = \underline{0}$. $\square$

Wissen also jetzt: μ_f existiert, und $\mu_f \mid \chi_f$.
Tatsächlich gilt noch mehr:

14.16 Satz: Für jeden Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen VRs haben χ_f und μ_f dieselben irreduziblen Faktoren.
(Insbesondere haben sie dieselben Nullstellen.)

Beispiele mit $f \circlearrowright \mathbb{R}^2$

① Für $f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\chi_f = (X-2)\cdot(X-1)$.
Cayley-Hamilton impliziert:

$$\mu_f = \begin{cases} 1 & \text{oder} \\ X-1 & \text{oder} \\ X-2 & \text{oder} \\ (X-1)(X-2) & \end{cases}$$

Satz 14.16 zeigt sofort:

$$\mu_f = (X-1)(X-2)$$

② Für $f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist $\chi_f = (X-2)^2$.
Cayley-Hamilton zeigt:

$$\mu_f = \begin{cases} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{cases}$$

Satz 14.17 schließt nur $\mu_f = 1$ aus, was ohnehin klar ist $(\mathrm{ev}_f(1) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\ \forall f)$.
Kurze Rechnung zeigt:

$$\mu_f = X-2$$

③ Für $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls $\chi_f = (X-2)^2$.
In diesem Fall gilt für $A = X-2$:

$$A(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mu_f = (X-2)^2$.

④ Für $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\chi_f = X^2+1$ irreduzibel (über $\mathbb{R}$). Also ist $\mu_f = X^2+1$

	χ_f	μ_f
①	$(X-1)(X-2)$	$(X-1)(X-2)$
②	$(X-2)^2$	$(X-2)$
③	$(X-2)^2$	$(X-2)^2$
④	X^2+1	X^2+1

Beweis zu Satz 14.16:

Nach Cayley-Hamilton (14.7) ist jeder Primfaktor von μ_f auch ein Faktor von χ_f.

Sei nun umgekehrt P Primfaktor von χ_f.

Induktion über $\dim V$:

IA: $\dim V = 1$ ✓

(V zyklisch, also $\chi_f = -\mu_f$ nach Satz 14.13.)

IS: Sei $\dim V > 1$. Wähle $\underline{w} \in V$, $\underline{w} \neq \underline{0}$.

$W := \langle \underline{w}, f(\underline{w}), f^2(\underline{w}), \ldots \rangle$

$1 \leq \dim W \leq \dim V$

Nach Lemma 14.15 ist

$$\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{\bar{f}}$$

Falls $P \mid \chi_{f|_W}$:

- $P \mid \mu_{f|_W}$, denn $\chi_{f|_W} = \pm \mu_{f|_W}$ nach Satz 14.13.
  (Falls $\dim W < \dim V$, können wir alternativ auch IV anwenden.)
- $\mu_{f|_W} \mid \mu_f$ nach Notiz 14.6, denn $\mu_f(f|_W) = \mu_f(f)|_W = 0|_W$.

Insgesamt folgt also $P \mid \mu_f$.

Falls $P \mid \chi_{\bar{f}}$:

- $P \mid \mu_{\bar{f}}$ nach IV, denn $\dim \overline{W} = \dim V - \dim W < \dim V$.
- $\mu_{\bar{f}} \mid \mu_f$ nach Notiz 14.6, denn $\mu_f(\bar{f}) = 0$.

Insgesamt folgt wieder $P \mid \mu_f$. $\square$

Kleine „Anwendung“:

14.17 Spaltungssatz:

$V \ni f$ Endomorphismus eines endlich-dim. VRs.

Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei **f-stabile** UVR W_P, W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \quad \text{und} \quad \mu_{f|W_P} = P,$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \quad \text{und} \quad \mu_{f|W_Q} = Q.$$

(Dass W_P & W_Q f-stabil sind, heißt in Matrix-schreibweise wieder, dass f die Form hat

$$W_P \oplus W_Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}} W_P \oplus W_Q$$

)

Für den Beweis zeigen wir zunächst:

14.18 Lemma: $f, g : V \rightrightarrows V$ Endomorphismen

Falls $f \circ g = g \circ f$, so sind $\ker(g)$ und $\operatorname{im}(g)$ f-stabil.

Beweis:

$\underline{v} \in \ker(g) \Rightarrow g(f(\underline{v})) = f(g(\underline{v})) = f(\underline{0}) = 0$, also $f(\underline{v}) \in \ker(g)$.

$\underline{v} \in \operatorname{im}(g) \Rightarrow \underline{v} = g(\underline{w})$ für ein $\underline{w}$

$\Rightarrow f(\underline{v}) = f(g(\underline{w})) = g(f(\underline{w})) \in \operatorname{im}(g)$. $\square$

Beweis zu 14.17:

Definiere $W_P := \ker(P(f))$

$W_Q := \ker(Q(f))$.

Da f, $P(f)$ und $Q(f)$ kommutieren (Notiz 14.3), folgt f-Stabilität von W_P & W_Q aus Lemma 14.18.

Da P, Q teilerfremd existieren nach dem Lemma von Bézout (genauer: Korollar 13.14) $A, B \in K[X]$ mit

$$A \cdot P + B \cdot Q = 1 \quad \text{in } K[X],$$

also $(*)$ $\quad A(f) \circ P(f) + B(f) \circ Q(f) = \mathrm{id} \quad \text{in } \mathrm{End}_K(V)$.

Beachte (wieder nach Notiz 14.4):

$$A(f) \circ P(f) = P(f) \circ A(f)$$

und $\quad B(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ B(f)$.

$W_P = \mathrm{im}(Q(f))$:

$W_P \subseteq \mathrm{im}(Q(f))$: $\quad \underline{v} \in W_P \Leftrightarrow P(f)(\underline{v}) = \underline{0}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \; B(f)(Q(f)(\underline{v})) = \underline{v}$$
$$\quad \overset{\shortparallel}{Q(f)(B(f)(\underline{v}))}$$
$$\Longrightarrow \; \underline{v} \in \mathrm{im}(Q(f))$$

$W_P \supseteq \mathrm{im}(Q(f))$: Aus $\underline{v} = Q(f)(\underline{w})$ für ein $\underline{w} \in V$ folgt wegen $\mu_f = P \cdot Q$:

$$P(f)(\underline{v}) = P(f) \circ Q(f)(\underline{v})$$
$$= \mu_f(f)(\underline{v}) = \underline{0},$$

also $\underline{v} \in \ker(P(f)) = W_P$.

$W_Q = \mathrm{im}(P(f))$: analog

$W_P \cap W_Q = \{0\}$:

Für $\underline{v} \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$ folgt aus $(*)$: $\underline{0} = \underline{v}$

$W_P + W_Q = V$:

Nach Dimensionsformel ergibt sich:

$$\dim(W_P + W_Q) = \dim W_P + \dim W_Q - \underbrace{\dim(W_P \cap W_Q)}_{0}$$
$$= \dim(\operatorname{im} Q(f)) + \dim(\ker P(f))$$
$$\overset{\text{Rangformel}}{=} \dim V$$

Also folgt $V = W_P \oplus W_Q$.

(Alternatives Argument:

Aus $(*)$ folgt $V = \operatorname{im}(Q(f)) + \operatorname{im}(P(f))$)

Minimalpolynome:

Offenbar

$$P(f|_{W_P}) = P(f)|_{W_P} = 0, \text{ daher } P = \mu_{f|W_P} \cdot \tilde{P} \quad \text{(a)}$$
$$Q(f|_{W_Q}) = Q(f)|_{W_Q} = 0, \text{ daher } Q = \mu_{f|W_Q} \cdot \tilde{Q} \quad \text{(b)}$$

für gewisse $\tilde{P}, \tilde{Q} \in K[X]$ (Notiz 14.7).

Da P, Q & Minimalpolynome normiert sind, sind auch $\tilde{P}, \tilde{Q}$ normiert.

Ferner folgt aus $V = W_P \oplus W_Q$:

$$(\mu_{f|W_P} \cdot \mu_{f|W_Q})(f) = 0, \text{ daher}$$
$$\mu_{f|W_P} \cdot \mu_{f|W_Q} = \mu_f \cdot \tilde{R} \quad \text{(c)}$$

für ein normiertes Polynom $\tilde{R}$.

Insgesamt ergibt sich:

$$\mu_f = P \cdot Q = \mu_{f|W_P} \cdot \tilde{P} \cdot \mu_{f|W_Q} \cdot \tilde{Q} = \mu_f \cdot \tilde{R} \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$$

Daraus folgt: $\tilde{R} \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{Q} = 1$, also

$$\tilde{R}, \tilde{P}, \tilde{Q} \in (K[X])^* = K^*.$$

Da $\tilde{R}, \tilde{P}, \tilde{Q}$ normiert, folgt $\tilde{R} = \tilde{P} = \tilde{Q} = 1$, und somit nach (a) & (b): $P = \mu_{f|W_P}$, $Q = \mu_{f|W_Q}$.

$\square$

14.19 Korollar: Drittes Diagonalisierungskriterium

f Endomorphismus eines endlich-dim. Vektorraums V.

f ist diagonalisierbar

$\Updownarrow$

μ_f zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren

Erinnerung:

9.10 Geometrisches Diagonalisierbarkeits-kriterium

Seien $a_1, \dots, a_\ell$ die verschiedenen EW von $f: V \to V$, V endlich-dim. Dann gilt:

(a) f diagonalisierbar

$\Updownarrow$

(b) $\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(f, a_i) = V$ („V zerfällt in die Eigenräume")

$\Updownarrow$

(c) $\sum_{i=1}^{\ell} \dim \mathrm{Eig}(f, a_i) = \dim V$

9.23 Algebraisches/Starkes Diagonalisierbarkeitskriterium

V endlich-dim. VR, $V \xrightarrow{f} V$ Endom.

f ist diagonalisierbar

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \chi_f \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \\ (\text{d.h. } \chi_f = (X-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X-a_\ell)^{n_\ell} \cdot q \text{ für ein } q \in K^\times) \\ \text{und für jeden EW } a \text{ von } f \text{ gilt:} \\ \text{geometrische Vielfachheit von } a = \text{algebraische Vielfachheit von } a \end{cases}$

Beweis zu 14.19:

($\Downarrow$) Ist f diagonalisierbar, sagen wir

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} a_\ell & & \\ & \ddots & \\ & & a_\ell \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

bezüglich einer gewissen Basis B,

mit $a_1, \dots, a_\ell$ paarweise verschieden, so gilt für

$$P := (X-a_1) \cdot \ldots \cdot (X-a_\ell)$$

offenbar $P(f) = 0$, und es folgt $P = \mu_f$.

($\Uparrow$) Ist $\mu_f = (X-a_1) \cdot \ldots \cdot (X-a_\ell)$

mit $a_1, \dots, a_\ell$ paarweise verschieden, so folgt aus dem Spaltungssatz 14.17

induktiv

$$V = \bigoplus V_i$$

mit $V_i = \ker(f - a_i \cdot id) = \mathrm{Eig}(f; a_i)$.

Also ist f diagonalisierbar laut geometr. Diagonalisierbarkeitskriterium 9.10.

$\square$