12 Hauptachsentransformation

Verschiedene Sichtweisen

Satz über
- selbstadjungierte Endomorphismen euklidischer/unitärer VR
- reelle symmetrische/hermitesche Matrizen
- reelle symmetrische/hermitesche Bilinearformen
- reelle Quadriken

12.1 Def: Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären VRs $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

12.2 Notiz: Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$, $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die lineare Abb. $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist genau dann selbstadjungiert bzgl. des Standardskalarprodukts auf K^n, wenn gilt:

$K = \mathbb{C}$: A ist symmetrisch, also $A^T = A$

$K = \mathbb{R}$: A ist hermitesch, also $\overline{A}^T = A$.

Vgl. Satz 11.4: f_A Isometrie $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}^T = A^{-1}$.

(Einfache Rechnung: $\langle f_A(\underline{v}), \underline{w} \rangle = (A \cdot \underline{v})^T \cdot \overline{\underline{w}} = \underline{v}^T \cdot A^T \cdot \overline{\underline{w}}$

$\langle \underline{v}, f_A(\underline{w}) \rangle = \underline{v}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{\underline{w}}$.)

12.3 Satz:

① Alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Endomorph. sind reell.

② EV zu verschiedenen EW eines selbstadj. Endom. stehen senkrecht zueinander.

(vgl. Satz 11.2)

Beweis:

1: Im euklidischen Fall nichts zu zeigen.

Unitärer Fall: Sei $\underline{v} \neq 0$ EV zum EW $a \in \mathbb{C}$.

$$\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle = \langle a \cdot \underline{v}, \underline{v} \rangle = a \cdot \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$
$$\shortparallel$$
$$\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle = \langle \underline{v}, a \cdot \underline{v} \rangle = \bar{a} \cdot \underbrace{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}_{\|\underline{v}\|^2 \neq 0}$$

Also $a = \bar{a}$, d.h. $a \in \mathbb{R}$.

2:
$$\left.\begin{aligned} f(\underline{v}) &= a \cdot \underline{v} \\ f(\underline{w}) &= b \cdot \underline{v} \\ \langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle &= \langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle \end{aligned}\right\} \quad a \cdot \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = b \cdot \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

reell, also keine Konjugation nötig!

Also entweder $a = b$ oder $\underline{v} \perp \underline{w}$ □

12.4 Lemma:

Sei $(V, \langle\cdot;\cdot\rangle)$ euklidischer/unitärer VR, $V \circlearrowleft f$ selbstadjungiert.

Ist $W \subseteq V$ f-stabil so ist auch $W^\perp \subseteq V$ f-stabil.

(vgl. Lemma 11.10)

Beweis:

Für $\underline{v} \in W^\perp$, $\underline{w} \in W$ gilt:

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underbrace{f(\underline{w})}_{\in W} \rangle = 0.$$

Also $f(\underline{v}) \in W^\perp$ □

12.5 Spektralsatz

(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abbildungen)

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus eines endlich-dim. euklidischen oder unitären VRs V existiert eine ON-Basis von V aus EV von f.

Bezüglich dieser Basis hat f also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

Induktion über $\dim V$.

IA: $\dim V = 0$ ✓

$\dim V = 1$: Wähle $\underline{v} \neq \underline{0}$ beliebig,

$\underline{b} := \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$.

$B := (\underline{b})$ ON-Basis ✓

IV: Satz gilt für VR W mit $\dim W < \dim V$.

IS: Wie im Beweis zum Struktursatz für Isometrien (11.7) genügt es, einen f-stabilen UVR mit $0 < \dim W < \dim V$ zu finden.

Unitärer Fall:

χ_f besitzt Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ (nach 3.21).

Also besitzt f EV $\underline{w}$ zum EW a.

Nach 12.3 somit $a \in \mathbb{R}$.

Wähle $W := \langle \underline{w} \rangle$.

Euklidischer Fall:

Weiter wie im Beweis zu 11.7:

- $\exists$ $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt.
- Fasse f darstellende Matrix

$$A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$$

als komplexe Matrix:

$$\begin{tikzcd} f_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \arrow[r, "\cdot A"] & \mathbb{C}^n \\ f: \mathbb{R}^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cdot A"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Auch $f_{\mathbb{C}}$ ist selbstadjungiert, denn A ist hermitesch $(\overline{A}^T = A^T = A)$.

Das Polynom

$$\chi_{f_{\mathbb{C}}} = \left(\chi_f \text{ aufgefasst als Polynom} \in \mathbb{C}[X]\right).$$

besitzt Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ (nach 3.21).

Nun ist a EW zu $f_{\mathbb{C}}$, also

$$a \in \mathbb{R} \text{ nach } 12.3.$$

Somit ist a reelle Nullstelle von χ_f, somit reeller EW von f.

Wähle wieder $W = \langle \underline{w} \rangle$ für einen EV $\underline{w}$ zu a. $\square$

12.6 Satz:

Hauptachsentransformation für Matrizen

1. Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$ $\exists\ S \in O(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^{T}AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a_i \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist A ähnlich und kongruent zu einer Diagonalmatrix.

2. Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in Mat_{\mathbb{C}}(n \times n)$ $\exists\ S \in U(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^{T}AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a_i \in \mathbb{R}.\ !$$

Insbesondere ist A ähnlich (aber nicht notwendig kongruent) zu einer reellen Diagonalmatrix.

Beweis:

Die Abb. f_A ist jeweils selbstadjungiert.
Sei $S :=$ Matrix mit Spalten ON-Basis aus 12.4, seien $a_1, \dots, a_n$ die zugehörigen (reellen) EW. Dann ist jeweils

$$S \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \cdot S^{-1} = A,$$

also $S^{-1} \cdot A \cdot S$ von der angegebenen Form.
Ferner $S \in O(n)$ bzw. $U(n)$ nach Satz 11.4, und daher $S^{-1} = S^{T}$ bzw. $S^{-1} = \overline{S}^{T}$. $\square$

12.7 Satz:

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder | symmetrischen Bilinearform β auf einem
| hermiteschen Sesquilinearform

endlich-dim. | euklidischen VR $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ existiert
| unitären

eine ON-Basis $\mathcal{B}$ von V, in der gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a_i \in \mathbb{R}.$$

⚠ 2 Formen: β & $\langle \cdot , \cdot \rangle$

Beweis:

OE $V = K^n$ mit Standardskalarprodukt ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

euklidischer Fall:

Nach Satz 12.5 existiert zu Matrix $M(\beta)$
$S \in O(n)$ mit $\underbrace{S^T \cdot M(\beta) \cdot S}_{M_S(\beta)}$ = reelle Diagonalmatrix.
(vgl. Satz 10.6)

$$\begin{tikzcd} K^n \times K^n \arrow[d, "S \times S"'] \arrow[dr, "\text{(reelle Diagonalmatrix)}"] & \\ K^n \times K^n \arrow[r, "\beta"'] & K \end{tikzcd}$$

unitärer Fall:

Analog $\exists\, S \in U(n)$ mit
$\underbrace{\overline{S}^T M(\beta) S}_{M_S(\beta)}$ = reelle Diagonalmatrix.
(sesquilineare Variante von Satz 10.6) $\square$

Geometrische Interpretation (über $\mathbb{R}$)

12.8 Def: V endlich-dim. reeller VR, β Bilinearform auf V.
Die assoziierte quadratische Abbildung ist

$$q_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{v} \mapsto \beta(\underline{v}, \underline{v})$$

Die assoziierte reelle affine Quadrik ist die Menge

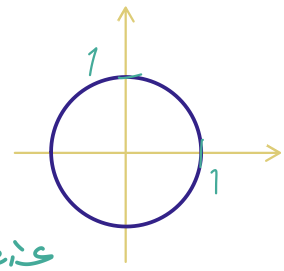
$$Q_\beta := \{ \underline{v} \in V \mid q_\beta(\underline{v}) = 1 \}$$

Beispiele für $V = \mathbb{R}^2$:

(1 1) $\beta = \beta_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$$q_\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$

$$Q_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

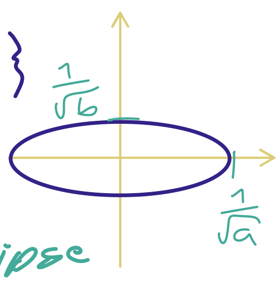


Kreis

(+ +) $\beta = \beta_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}$ mit $a, b > 0$:

$$q_\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto a x_1^2 + b x_2^2$$

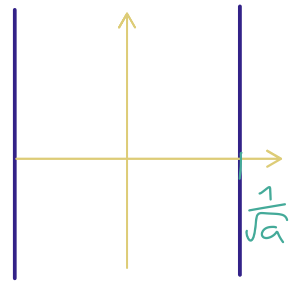
$$Q_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a x_1^2 + b x_2^2 = 1 \right\}$$



Ellipse

(+0) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \beta_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ mit $a > 0$:

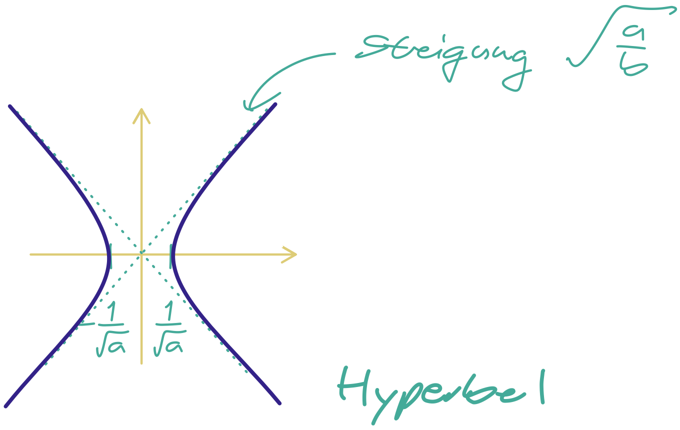
$$Q_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a x_1^2 = 1 \right\}$$



(+−) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \beta_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}}$, $a, b > 0$:

$$Q_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a x_1^2 - b x_2^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{x_1^2 - \frac{1}{a}} \right\}$$



Hyperbel

(−−) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \beta_{\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}}$, $a, b \geq 0$:

$$Q_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{-a x_1^2 - b x_2^2}_{\leq 0} = 1 \right\} = \emptyset$$

(A) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \beta_{\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}}$

$$Q_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a x_1^2 + 2c x_1 x_2 + b x_2^2 = 1 \right\}$$

Bild ??

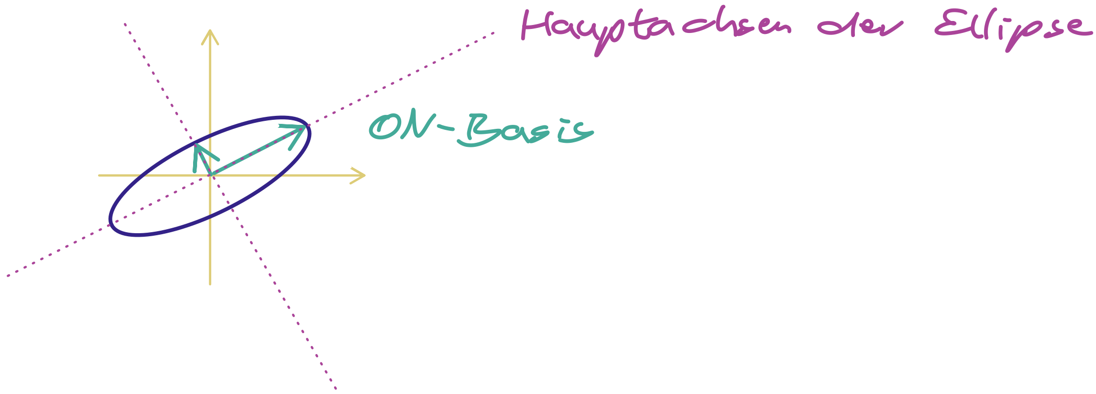
12.9 Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle Quadrik in einem **euklidischen** VR $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten **ON-Basis** $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ die Form

$$Q = \left\{ \sum x_i \underline{b}_i \in V \;\middle|\; \sum q_i x_i^2 = 1 \right\}$$

für gewisse $q_i \in \mathbb{R}$.

$\longrightarrow$ Bis auf Rotation sieht jede affine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ aus wie eines der Beispiele $++$, $+-$, $+0$, $--$



Wenn wir beliebige Basis (statt ON-Basis) zulassen, können wir reelle symmetrische Matrix noch weiter normalisieren:

12.10 Trägheitssatz von Sylvester

(1) Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n_+}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n_-}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n_0}$$

$(\exists S \in GL_n(\mathbb{R}): \ S^T A S = \dots \quad)$

(2) Die Zahlen n_+, n_-, n_0 sind eindeutig durch A bestimmt.

Beweis:

Nach 12.5 $\exists S \in O(n)$ mit

$$S^T A S = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Können annehmen:

$$a_1, \dots, a_k > 0,$$
$$a_{k+1}, \dots, a_\ell < 0,$$
$$a_\ell = \dots = a_n = 0.$$

Definiere $s_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} & \text{für } i = 1, \dots, l \\ 1 & \text{für } i = l+1, \dots, n. \end{cases}$

$$\tilde{S} := \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $S \cdot \tilde{S} \in GL_n(\mathbb{R})$ (denn $S, \tilde{S} \in GL_n(\mathbb{R})$), und

$$(S\tilde{S})^T A \cdot S\tilde{S} = \tilde{S}^T S^T A S \tilde{S}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1^2 a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n^2 a_n \end{pmatrix}$$

ist von der gewünschten Form, denn

$$s_i^2 \cdot a_i = \begin{cases} \frac{a_i}{|a_i|} = \pm 1 \\ 1 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

2: Seien $S, T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit

$$S^T A S = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} \qquad T^T A T = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$$

$$b_i \in \{+1, -1, 0\} \qquad c_i \in \{+1, -1, 0\}$$

Zu zeigen:
$$|\{i \mid b_i = 1\}| = |\{i \mid c_i = 1\}|$$
$$|\{i \mid b_i = -1\}| = |\{i \mid c_i = -1\}|$$

Sei dazu $\beta := \beta_A$.

$S^T A S = M_S(\beta)$ für die Basis $S = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n)$ von $\mathbb{R}^n$, die aus den Spalten von S besteht.

$T^T A T = M_T(\beta)$ für die Basis $T = (\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)$ von $\mathbb{R}^n$, die aus den Spalten von T besteht.

Definiere

$$V_+ := \langle \underline{s}_i \mid b_i = +1 \rangle \qquad W_+ := \langle \underline{t}_i \mid c_i = +1 \rangle$$
$$V_- := \langle \underline{s}_i \mid b_i = -1 \rangle \qquad W_- := \langle \underline{t}_i \mid c_i = -1 \rangle$$
$$V_0 := \langle \underline{s}_i \mid b_i = 0 \rangle \qquad W_0 := \langle \underline{t}_i \mid c_i = 0 \rangle$$

$$\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$$

Reicht zu zeigen: $\dim V_+ = \dim W_+$
$\dim V_- = \dim V_-$

Betrachte dazu $\underline{v} \in V_+ \cap (W_- \oplus W_0)$:

$\beta(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ falls $\underline{v} \neq 0$ (denn $\underline{v} \in V_+$)

$\beta(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$ (denn $\underline{v} \in W_- \oplus W_0$).

Also ist $V_+ \cap (W_- \oplus W_0) = \{\underline{0}\}$, und somit

$$\dim(V_+ + W_- \oplus W_0) = \dim(V_+) + \dim(W_- \oplus W_0)$$
$$\leq n =$$
$$\dim(W_+ + W_- \oplus W_0) = \dim(W_+) + \dim(W_- \oplus W_0)$$

Das zeigt $\dim(V_+) \leq \dim W_+$.

Aus Symmetriegründen folgt

$$\dim(V_+) = \dim W_+.$$

Analog: $\dim(V_-) = \dim W_-$.

$\square$