Skalarprodukte

$\boxed{K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}}$

10.14 Def.:

Eine $\left|\begin{array}{l}\text{symmetrische Bilinearform} \\ \text{hermitesche Sesquilinearform}\end{array}\right.$ B auf einem

$\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\text{-VR} \\ \mathbb{C}\text{-VR}\end{array}\right.$ V ist positiv definit, falls

$$\underbrace{B(\underline{v},\underline{v})}_{\in \mathbb{R}} > 0 \qquad \forall \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$$

10.15 Def.:

Ein Skalarprodukt (oder: inneres Produkt) auf einem $\mathbb{R}$-VR V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{v}, \underline{w} \longmapsto \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

Ein euklidischer Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR V zusammen mit einem solchen Skalarprodukt.

Ein Skalarprodukt (oder: inneres Produkt) auf einem $\mathbb{C}$-VR V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\underline{v}, \underline{w} \longmapsto \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

Ein unitärer Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-VR V zusammen mit einem solchen Skalarprodukt.

In beiden Fällen ist die assoziierte Norm gegeben durch

$$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{v} \longmapsto \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

10.16 Beispiel: Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\underline{y}} \Big\rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \underline{x}^T \cdot \mathbb{1}_n \cdot \underline{y}$$

(Standardskalarprodukt ist die durch $\mathbb{1}_n$ definierte Bilinearform)

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$ – gewöhnliche „Länge" von $\underline{x}$

10.17 Beispiel: Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$$\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\underline{y}} \Big\rangle := x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \cdot \overline{y_n}$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$$= \underline{x}^T \cdot \mathbb{1}_n \cdot \underline{y}$$

(Standardskalarprodukt ist die durch $\mathbb{1}_n$ definierte Sesquilinearform.)

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$$

komplexer Betrag
(Notiz 3.11: $x \cdot \overline{x} = |x|^2$ für $x \in \mathbb{C}$)

10.18 Satz: In jedem euklidischen oder unitären VR $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\underline{v}\| \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in V$

$\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

(ii) $\|s\cdot\underline{v}\| = |s|_K \|\underline{v}\| \quad \forall s \in K, \ \underline{v} \in V$

(iii) Dreiecksungleichung:

$$\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$$

(iv) Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle|_K \leq \|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|$$

Beweis:

i: folgt aus positiver Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$

ii: $$\|s\cdot\underline{v}\| = \sqrt{\langle s\cdot\underline{v}, s\cdot\underline{v}\rangle} = \sqrt{s\cdot\bar{s}}\cdot\sqrt{\langle\underline{v},\underline{v}\rangle} = \sqrt{|s|^2}\cdot\sqrt{\langle\underline{v},\underline{v}\rangle} = |s|\cdot\|\underline{v}\|$$

$(\bar{s} = s$ für $s \in \mathbb{R})$

iv: Falls $\underline{w} = \underline{0}$: ✓

Falls $\underline{w} \neq \underline{0}$: Definiere $s := \dfrac{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}$.

Dann ist

$$0 \leq \|\underline{v} - s\cdot\underline{w}\|^2 = \langle \underline{v} - s\cdot\underline{w}, \underline{v} - s\cdot\underline{w}\rangle$$

$$= \langle\underline{v},\underline{v}\rangle - s\cdot\overline{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle} - \bar{s}\cdot\langle\underline{v},\underline{w}\rangle + s\bar{s}\cdot\langle\underline{w},\underline{w}\rangle$$

$$= \|\underline{v}\|^2 - \frac{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle\cdot\overline{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle}}{\|\underline{w}\|^2} - \cancel{\frac{\overline{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle}\langle\underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}}$$

$$+ \cancel{\frac{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle\overline{\langle\underline{v},\underline{w}\rangle}}{\|\underline{w}\|^{\cancel{4}\,2}}}\cdot\cancel{\|\underline{w}\|^2}$$

$$= \|\underline{v}\|^2 - \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \cdot \overline{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}}{\|\underline{w}\|^2}$$

$$= \|\underline{v}\|^2 - \frac{|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle|^2}{\|\underline{w}\|^2}$$

Somit $|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2$, und wegen Monotonie von $\sqrt{}$ folgt die Behauptung.

iii: $$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w} \rangle$$

$$= \|\underline{v}\|^2 + \underbrace{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \overline{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}}_{2 \cdot \mathrm{Re}(\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle)} + \|\underline{w}\|^2$$

$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{Re}(z) \leq |z|$

$$\leq \|\underline{v}\|^2 + 2 \cdot |\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| + \|\underline{w}\|^2$$

$$\underset{iv}{\leq} \|\underline{v}\|^2 + 2 \cdot \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2$$

$$= (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2$$

Da $\sqrt{}$ monoton ist, folgt

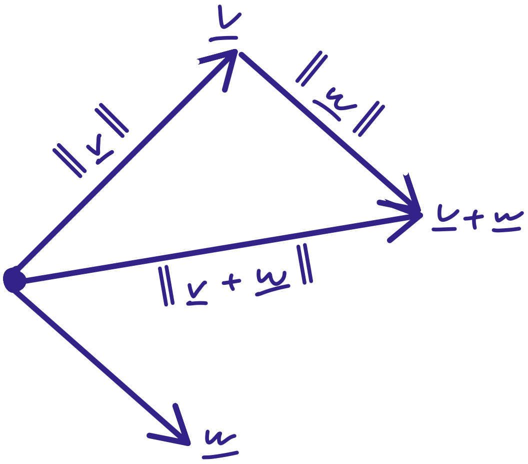
$$\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$$

$\square$

10.19 Anschauung:

Für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist $\|\underline{v}\|$ die Länge von $\underline{v}$, oder der Abstand von $\underline{v}$ zu $\underline{0}$.

Dreiecksungleichung:



$\underbrace{\left(\frac{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|}\right)}_{\in [-1,\,1] \text{ nach Cauchy-Schwarz}}$

Den Winkel zwischen $\underline{v}$ und $\underline{w}$ können wir definieren als

$$\sphericalangle(\underline{v}, \underline{w}) := \arccos\left(\underbrace{\frac{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|}}_{\in [-1,\,1] \text{ nach Cauchy-Schwarz (10.18 iv)}}\right) \in [0, \pi]$$

Dann ist also

$$\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle = \|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|\cdot\cos\left(\sphericalangle(\underline{v}, \underline{w})\right).$$