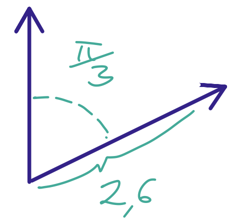
10 Skalarprodukte

$\mathbb{R}^n$ ($\& \, \mathbb{C}^n$) hat zusätzlich zur VR-Struktur weitere Struktur: Längen & Winkel



Diese Struktur kann durch ein Skalarprodukt beschrieben werden. Dazu zunächst allgemein:

Bilinearformen

K Körper, V K-VR

10.1 Def: Eine Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung

$$\beta: V \times V \longrightarrow K,$$

$$\beta(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = \beta(\underline{v}_1, \underline{w}) + \beta(\underline{v}_2, \underline{w})$$
$$\beta(s \cdot \underline{v}, \underline{w}) = s \cdot \beta(\underline{v}, \underline{w})$$
$$\beta(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \beta(\underline{v}, \underline{w}_1) + \beta(\underline{v}, \underline{w}_2)$$
$$\beta(\underline{v}, s \cdot \underline{w}) = s \cdot \beta(\underline{v}, \underline{w})$$

$$\forall\, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w} \in V, \quad r, s \in K$$

Bilinearformen auf K^n lassen sich – genauso wie lineare Abbildungen $K^n \to K^n$, durch Matrizen beschreiben!

$A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert Bilinearform

$$\mathcal{B}_A : \begin{array}{ccc} K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ \underline{v} \quad\ \underline{w} & & \underline{v}^T \cdot A \cdot \underline{w} \end{array}$$

Bilinearform $\mathcal{B}$ auf K^n liefert

$$M(\mathcal{B}) := \left(\mathcal{B}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)\right)_{ij} \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$$

10.2 Satz: Obige Konstruktion liefert zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Bilinearformen} \\ \text{auf } K^n \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\ \cong\ } \mathrm{Mat}_K(n \times n)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longmapsto & M(\mathcal{B}) \\ \mathcal{B}_A & \longleftarrow\!\shortmid & A \end{array}$$

(vgl. Hauptsatz 6.4 / 6.7)

Beispiel: $\beta: K^2 \times K^2 \longrightarrow K$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

ist eine Bilinearform.

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} \det \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \det \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \\ \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \underline{e}_2 & \underline{e}_1 \end{matrix} \end{array} & \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \underline{e}_2 & \underline{e}_2 \end{matrix} \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta_{M(\beta)}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) &= (a \ b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= (a \ b) \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \\ &= ad - bc \\ &= \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \beta \end{aligned}$$

Beweis zu 10.2:

$\beta_{M(\beta)} = \beta$: $\quad \underset{\underset{\sum v_i \underline{e}_i}{\parallel}}{\underline{v}}, \ \underset{\underset{\sum w_i \underline{e}_i}{\parallel}}{\underline{w}} \in K^n$ beliebig

$$\begin{aligned} \beta_{M(\beta)}(\underline{v}, \underline{w}) &= \underline{v}^T \cdot M(\beta) \cdot \underline{w} \\ &= \sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{\underline{e}_i^T M(\beta) \cdot \underline{e}_j}_{M(\beta)_{ij}^{(*)}} \\ &= \sum_{i,j} v_i w_j \, \beta(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \\ &\overset{\beta \text{ bilinear}}{=} \beta\Big(\underbrace{\sum_i v_i \underline{e}_i}_{\underline{v}}, \underbrace{\sum_j w_j \underline{e}_j}_{\underline{w}}\Big) = \beta(\underline{v}, \underline{w}) \end{aligned}$$

$$\left[\; *: \quad \underline{e}_i^T \cdot M \cdot \underline{e}_j = \underline{e}_i^T \cdot (j\text{-te Spalte von } M) = \text{Eintrag von } M \text{ an der Stelle } i,j \;\right]$$

$$M(\beta_A) = \left(\beta_A(\underline{e}_i, \underline{e}_j)\right)_{i,j}$$

$$= \left(\underline{e}_i^T \cdot A \cdot \underline{e}_j\right)_{i,j}$$

$$\overset{(*)}{=} \left(A_{i,j}\right)_{i,j} = A \qquad \square$$

Allgemeiner:

V VR mit Basis $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

β Bilinearform auf V

$$\begin{tikzcd}
K^n \times K^n \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}} \times \varphi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \arrow[dr, dashed, "\text{Bilinearform auf } K^n"] & \\
V \times V \arrow[r, "\beta"'] & K
\end{tikzcd}$$

10.3 Def: Darstellende Matrix von β bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist

$$M_{\mathcal{B}}(\beta) := M\left(\beta \circ (\varphi_{\mathcal{B}} \times \varphi_{\mathcal{B}})\right)$$

$$= \left(\beta(\underline{b}_i, \underline{b}_j)\right)_{i,j}$$

10.4 Satz: V n-dim K-VR, $\mathcal{B}$ Basis von V
Die Abbildung

$$\left\{\begin{matrix}\text{Bilinearformen} \\ \text{auf } V\end{matrix}\right\} \longrightarrow \mathrm{Mat}_K(n\times n)$$

$$\beta \longmapsto M_{\mathcal{B}}(\beta)$$

ist eine Bijektion.
(vgl. Satz 7.5)

Beweis:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Bilinearformen} \\ \text{auf } V\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} \left\{\begin{matrix}\text{Bilinearformen} \\ \text{auf } K^n\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\cong]{(\text{Satz } 10.2)} \mathrm{Mat}_K(n\times n)$$

$$\beta \longmapsto M(\beta)$$

$$\beta \longmapsto \beta\circ(\varphi_{\mathcal{B}}\times\varphi_{\mathcal{B}})$$

$$\beta\circ(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\times\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}) \longmapsfrom \beta$$

$$\beta \longmapsto M_{\mathcal{B}}(\beta)$$

$\square$

Basiswechsel für Bilinearformen

10.5 Def.: $A, A' \in Mat_K(n \times n)$ kongruent, falls invertierbare

$$S \in Mat_K(n \times n)$$

existiert, sodass gilt:

$$A' = S^T \cdot A \cdot S$$

(Def. 9.1: ähnlich: $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$)

10.6 Satz: A, A' sind genau dann kongruent, wenn sie bezüglich möglicherweise verschiedener Basen dieselbe Bilinearform darstellen.

($\Leftrightarrow \exists\, \beta: V \times V \to K$ Bilinearform, Basen B, B' von V mit

$$A = M_B(\beta)$$
$$A' = M_{B'}(\beta).$$
)

(vgl. Notiz 9.2)

Beweis:

$(\Leftarrow)$ Sei $\quad A = M_B(\beta) \quad$ ← darstellende Matrizen zu Bilinearformen

$\qquad\quad A' = M_{B'}(\beta)$

$$\begin{tikzcd}
K^n \times K^n \arrow[dr, "\varphi_B \times \varphi_B", "\cong"'] \arrow[drr, "(\underline{v},\underline{w}) \mapsto \underline{v}^T A \underline{w}"] & & \\
& V \times V \arrow[r, "\beta"] & K \\
K^n \times K^n \arrow[uu, "\text{linear}"', "(S\cdot\underline{v},\, S\cdot\underline{w}) \,\text{\rotatebox[origin=c]{90}{$\mapsto$}}\, (\underline{v},\underline{w})"] \arrow[ur, "\varphi_{B'} \times \varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[urr, "(\underline{v},\underline{w}) \mapsto \underline{v}^T A' \underline{w}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Def. $\quad S := M\left(\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{B'}\right)$ — darstellende Matrix zu linearer Abb.

Kommutativität des Diagrams zeigt:

$$\underline{v}^T \cdot A' \underline{w} = (S \cdot \underline{v})^T \cdot A \cdot (S \cdot \underline{w}), \quad \text{also}$$

$$\underline{v}^T \cdot A' \cdot \underline{w} = \underline{v}^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot \underline{w} \qquad \forall \underline{v}, \underline{w}.$$

Wähle für $\underline{v} = e_i$, $\underline{w} = e_j$ (vgl. (*) im Beweis zu 10.2):

$$(A')_{ij} = (S^T \cdot A \cdot S)_{ij} \qquad \forall i,j,$$

also folgt: $\quad A' = S^T \cdot A \cdot S.$ ✓

(Ferner S invertierbar, denn $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{B'}$ ist ein Isomorphismus.)

($\Rightarrow$) Sei $A' = S^T \cdot A \cdot S$ (S invertierbar).

Wähle $V = K^n$, $\beta := \beta_A$

$\mathcal{B}$: Standardbasis

$\mathcal{B}'$: Spalten von S

$$\begin{tikzcd}
K^n \times K^n \arrow[rr, "(\underline{v},\underline{w}) \mapsto \underline{v}^T A \underline{w}"] \arrow[dr, equal] & & K \\
& K^n \times K^n \arrow[r, "\beta"] & K \\
K^n \times K^n \arrow[uu, "\text{linear}"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{B}'} \times \varphi_{\mathcal{B}'}", "\cong"'] \arrow[uurr, "(\underline{v},\underline{w}) \mapsto \underline{v}^T A' \underline{w}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$(S \cdot \underline{v}, S \cdot \underline{w})$

$\Uparrow$

$(\underline{v}, \underline{w})$

A stellt β bzgl. Standardbasis dar.

A' stellt β bzgl. $\mathcal{B}'$ dar. $\square$

$$A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$$

$$K^n \xrightarrow{f_A} K^n \qquad\qquad K^n \times K^n \xrightarrow{\beta_A} K$$

$$\underline{v} \mapsto A \cdot \underline{v} \qquad\qquad \underline{v}, \underline{w} \mapsto \underline{v}^T \cdot A \cdot \underline{w}$$

A, A' stellen denselben Endom. dar

$\Updownarrow$

$\exists S: A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$

A, A' stellen dieselbe Bilinearform dar

$\Updownarrow$

$\exists S: A' = S^T \cdot A \cdot S$.

10.7 Def: Eine Bilinearform β auf V ist

... **symmetrisch**, falls $\beta(\underline{v},\underline{w}) = \beta(\underline{w},\underline{v})$

... **schiefsymmetrisch**, falls $\beta(\underline{v},\underline{w}) = -\beta(\underline{w},\underline{v})$

... **alternierend**, falls $\beta(\underline{v},\underline{v}) = 0$

$\forall \underline{v},\underline{w} \in V$

10.8 Notiz:

alternierend $\Rightarrow$ schiefsymmetrisch

Falls $1+1 \neq 0$ in K, gilt sogar:

alternierend $\Leftrightarrow$ schiefsymmetrisch

(vgl. Notiz 8.5 zu Determinanten.

Falls β alternierend, folgt aus

$$\underbrace{\beta(\underline{v}+\underline{w},\underline{v}+\underline{w})}_{0} = \beta(\underline{v},\underline{v}+\underline{w}) + \beta(\underline{w},\underline{v}+\underline{w})$$
$$= \underbrace{\beta(\underline{v},\underline{v})}_{0} + \beta(\underline{v},\underline{w}) + \beta(\underline{w},\underline{v}) + \underbrace{\beta(\underline{w},\underline{w})}_{0}$$

$$0 = \beta(\underline{v},\underline{w}) + \beta(\underline{w},\underline{v})$$

Falls β schiefsymmetrisch ist

$$\beta(\underline{v},\underline{v}) = -\beta(\underline{v},\underline{v}),$$

also $\underbrace{(1+1)}_{K} \cdot \beta(\underline{v},\underline{v}) = 0 \qquad \Big| \cdot (1+1)^{-1}$ falls $1+1 \neq 0$

$$\beta(\underline{v},\underline{v}) = 0.$$

In $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0],[1]\}$ ist $1+1=0$.)

10.9 Satz: Für Bilinearform $\mathcal{B}$ auf V, Basis B von V und $M := M_B(\mathcal{B})$ gilt:

$\mathcal{B}$ symmetrisch $\iff$ $M^T = M$ "M symmetrisch"

$\mathcal{B}$ schiefsymm. $\iff$ $M^T = -M$ "M schiefsymmetrisch"

$\mathcal{B}$ alternierend $\iff$ $(M^T = -M$ und $M_{ii} = 0 \ \forall i)$

Beweisteile: $B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$, also
$$M_{ij} = \mathcal{B}(\underline{b}_i, \underline{b}_j)$$

(symm. $\Rightarrow$) $M_{ij} = \mathcal{B}(\underline{b}_i, \underline{b}_j) \underset{\mathcal{B}\text{ symmetrisch}}{=} \mathcal{B}(\underline{b}_j, \underline{b}_i) = M_{ji}$,

d.h. $M^T = M$.

(alternierend $\Leftarrow$) Sei $\underline{v} = \sum_i v_i \underline{b}_i \in V$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\underline{v}, \underline{v}) &= \mathcal{B}\Big(\sum_i v_i \underline{b}_i, \sum_i v_i \underline{b}_i\Big) \\
&= \sum_i v_i \cdot \mathcal{B}\Big(\underline{b}_i, \sum_j v_j \underline{b}_j\Big) \\
&= \sum_{i,j} v_i v_j \underbrace{\mathcal{B}(\underline{b}_i, \underline{b}_j)} \\
&= \sum_{i,j} v_i v_j \cdot M_{ij} \\
&= \sum_{\substack{i,j:\\ i<j}} v_i v_j M_{ij} + \underbrace{\cancel{\sum_i v_i^2 M_{ii}}}_{\substack{0 \\ \text{wegen } M_{ii} = 0}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j:\\ i>j}} v_i v_j M_{ij}}_{\underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} v_i v_j M_{ji}}_{-\sum_{i,j} v_i v_j M_{ij}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$M_{ij} = -M_{ji}$
$M_{ii} = 0 \quad \forall i$

$\square$

Variation: $\underbrace{\text{Sesquilinearformen}}_{1\frac{1}{2}}$ $\boxed{K = \mathbb{C}}$

10.10 Def: Eine Sesquilinearform η auf einem $\mathbb{C}$-VR V ist eine Abbildung $\eta: V \times V \to \mathbb{C}$, die

(i) in der ersten Koordinate linear ist:

$$\eta(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = \eta(\underline{v}_1, \underline{w}) + \eta(\underline{v}_2, \underline{w})$$
$$\eta(s \cdot \underline{v}, \underline{w}) = s \cdot \eta(\underline{v}, \underline{w}) \qquad \forall \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w} \in V \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

(ii) in der zweiten Koordinate semi-linear ist:

$$\eta(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \eta(\underline{v}, \underline{w}_1) + \eta(\underline{v}, \underline{w}_2)$$
$$\eta(\underline{v}, s \cdot \underline{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\underline{v}, \underline{w}) \qquad \forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in V \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Sie ist hermitesch, falls ferner gilt:

(iii) $\eta(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\eta(\underline{w}, \underline{v})}$

10.11 Satz: Wir haben zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Sesquilinear-} \\ \text{formen auf } \mathbb{C}^n \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$$
$$\eta \longmapsto M(\eta)$$
$$\eta_A \longleftarrow A$$

$$M(\eta) := (\eta(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j}$$
$$\eta_A(\underline{v}, \underline{w}) := \underline{v}^T \cdot A \cdot \overline{\underline{w}}$$

$\square$

10.12 Satz:

η hermitesch $\Longleftrightarrow$ $\overline{M(\eta)}^T = M(\eta)$

10.13 Notiz: Für jede hermitesche Sesquilinearform β ist

$$\beta(\underline{v},\underline{v}) \in \mathbb{R} \qquad \forall \underline{v} \in V$$

$\left(\beta(\underline{v},\underline{v}) = \overline{\beta(\underline{v},\underline{v})}\right.$; Aus $a+ib = \overline{a+ib}$
folgt $a+ib = a-ib$,
also $b=0$, also $\left. a+ib = a \in \mathbb{R} \right)$