Matrizen II

Bisher: $K^n \longrightarrow K^m$ mit Standardbasen auf K^n & K^m

Jetzt: $V \longrightarrow W$
(oder $K^n \longrightarrow K^m$ mit anderen Basen)

Basen müssen i.A. **gewählt** werden!

Beispiel:

$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$

hat Basen $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

und ...

Mat (2×2) hat Basen

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

und ...

7.1 Satz: Eine lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren:

Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V, $C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$ beliebiges Tupel in W,

so existiert genau eine lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$ mit $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i \quad \forall i$.

Beweis:

Argumentiere wie im Beweis zum Hauptsatz, Teil II (6.4):

Jedes $\underline{v} \in V$ besitzt <u>eindeutige</u> Darstellung der Form

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} s_i \underline{b}_i \qquad \text{mit } s_i \in K$$

Sind $(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$ gegeben, so definiere f durch

$$f(\underline{v}) := \sum_{i=1}^{n} s_i \underline{c}_i$$

(Das ist wohldef. wegen Eindeutigkeit der s_i) Prüfe: f ist linear (...).

Offenbar $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$.

Diese Abb. ist auch eindeutig:

Ist g irgendeine lineare Abb. mit $g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$, so folgt

$$g(\underline{v}) = g\left(\sum_i s_i \underline{b}_i\right) \underset{\substack{g \\ \text{linear}}}{=} \sum_i s_i g(\underline{b}_i) = \sum_i s_i \underline{c}_i = f(\underline{v}) \qquad \square$$

7.2 Notation:

Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V, so sei $\varphi_{\mathcal{B}}$ die nach 7.1 eindeutige lineare Abb.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathcal{B}}: & K^n & \xrightarrow{\cong} & V \\ & \underset{\text{(Standardbasis)}}{\underline{e}_i} & \longmapsto & \underline{b}_i \end{array}$$

Ist $V = K^n$, so ist $\varphi_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}$, also Multiplikation mit der Matrix $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$.

Ist allgemeiner $V \overset{i}{\subseteq} K^N$ ein n-dim. UVR, so können wir eine Basis $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ von V als $N \times n$-Matrix auffassen (von vollem Rang n).
Dann ist $i \circ \varphi_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{B}}", "\cong"'] \arrow[dr, "f_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, hook, "i"] \\ & K^N \end{tikzcd}$$

7.3 Def: Sei $f: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung zwischen VR der Dimensionen n bzw. m; seien B und C Basen von V bzw. W. Die **Matrix zu f bezüglich B und C**

$$ {}_C M_B(f) $$

ist die Matrix zur linearen Abb. $\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B$:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rr, "{}_C M_B(f)"] \arrow[d, "\varphi_B"', "\cong"] & & K^m \arrow[d, "\varphi_C", "\cong"'] \\ V \arrow[rr, "f"] & & W \end{tikzcd}$$

7.4 Satz: Die Einträge der Matrix ${}_C M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$ erfüllen die Gleichungen

$$ f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \cdot \underline{c}_i $$

und sind dadurch eindeutig bestimmt.

Wir können also aus Spalte j von ${}_C M_B(f)$ das Bild von $\underline{b}_j$ unter f ablesen.

Beweis: Per Def. sind die m_{ij} eindeutig bestimmt durch:

$$ \left(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B\right)(\underline{e}_j) = \sum m_{ij}\, \underline{e}_i $$

(siehe Beweis zu Satz 6.4).
Wende nun φ_C an. $\square$

Beispiele:

1. $V = K^n$, $W = K^m$, B, C Standardbasen.

   Dann ist $\varphi_B = \mathrm{id}$, $\varphi_C = \mathrm{id}$, und

$$_C M_B(f) = M(f).$$

2. $V = \mathbb{R}^2$ mit Basis $B := \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

   $W = \mathbb{R}$ mit Basis $C := ((2))$

$$f : V \longrightarrow W$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto y$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rrr, dashed] \arrow[dr, "\cong"'] & & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\cong"] \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Multiplikation mit $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = f_B = \varphi_B$

$\varphi_C = f_C =$ Multiplikation mit 2

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto y$$

$$M(f) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$_C M_B(f) = M\left(f_C^{-1} \circ f \circ f_B\right)$$
$$= M(f_C)^{-1} \cdot M(f) \cdot M(f_B)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\tfrac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

7.5 Satz: (vgl. Satz 6.7) Sei $\dim V = n$, B Basis von V, $\dim W = m$, C Basis von W.

Die Abbildung

$$\mathrm{Mat}_K(m\times n) \longleftarrow \mathrm{Hom}_K(V,W)$$
$${}_C M_B(f) \longleftarrow\!\shortmid f$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Beweis: Die Abbildung ist die Komposition folgender Isomorphismen:

$$\mathrm{Mat}_K(m\times n) \underset{(6.7)}{\cong} \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \cong \mathrm{Hom}_K(V,W)$$

$$S \longmapsto f_S \qquad g \longmapsto \varphi_C \circ g \circ \varphi_B^{-1}$$

$$M(f) \longleftarrow\!\shortmid f \qquad \varphi_C^{-1}\circ f\circ \varphi_B \longleftarrow\!\shortmid f$$

$$M(\varphi_C^{-1}\circ f\circ\varphi_B) \longleftarrow\!\shortmid f$$

$$\| $$

$${}_C M_B(f)$$

$\square$

7.6 Satz: (vgl. 6.9/6.10)

Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ lineare Abb, A, B, C Basen.

Dann ist ${}_C M_A(f\circ g) = {}_C M_B(f) \cdot {}_B M_A(g)$.

Beweis:

Wissen bereits

$$(*) \quad M(f\circ g) = M(f)\cdot M(g)$$

im Fall $U = K^o$, $V = K^n$, $W = K^m$ (mit Standardbasen), siehe 6.9/6.10.

Daher folgt:

$$_C M_A(f\circ g) \underset{Def}{=} M(\varphi_C^{-1}\circ f\circ g\circ \varphi_A)$$

$$= M(\underbrace{\varphi_C^{-1}\circ f\circ \varphi_B}\circ \underbrace{\varphi_B^{-1}\circ g\circ \varphi_A})$$

jeweils Abb. zwischen $K^?$

$$\underset{(*)}{=} M(\varphi_C^{-1}\circ f\circ \varphi_B)\cdot M(\varphi_B^{-1}\circ g\circ \varphi_A)$$

$$\underset{Def}{=} {_C M_B}(f)\cdot {_B M_A}(g) \qquad \square$$

7.7 Korollar: Transformationsformel

V VR mit Basen B, B',
W VR mit Basen C, C'

Für jede lineare $f: V \longrightarrow W$ gilt:

$$_{C'}M_{B'}(f) = {_{C'}M_C}(id)\cdot {_C M_B}(f)\cdot {_B M_{B'}}(id)$$

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "{}_{C}M_{B}(f)"] \arrow[dr, "\varphi_B"] & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \arrow[dd, "{}_{C'}M_{C}(id)"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[uu, "{}_{B}M_{B'}(id)"] \arrow[ur, "\cong", "\varphi_{B'}"'] \arrow[rrr, "{}_{C'}M_{B'}(f)"'] & & & K^m \arrow[ul, "\cong"', "\varphi_{C'}"]
\end{tikzcd}
$$