6.28 Rezept: LGS lösen

Sei LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ gegeben.

SCHRITT 1:

Überführe erweiterte Matrix $(A|\underline{b})$ durch Zeilentrafo in Matrix $(A'|\underline{b}')$, in der A' Zeilenstufenform hat.

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & & & & & b'_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots \; * & b'_r \\ \hline
0 & & & & & & & & & & & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & 0 & b'_m
\end{array}\right)$$

Betrachte Zeilen $r+1, \ldots, m$ von A', die Null sind. Falls

$$\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \\ b'_m \end{pmatrix} \neq \underline{0}, \text{ folgt } \mathcal{L}(A', \underline{b}') = \emptyset$$

FERTIG

Falls $\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \\ b'_m \end{pmatrix} = \underline{0}$, wirf Nullzeilen weg und fahre fort.

SCHRITT 2:

Überführe Matrix durch weitere Zeilentrafo in Matrix $(A''|\underline{b}'')$ in Zeilennormalform. Nach Korollar 6.24 gilt

$$\mathcal{L}(A,\underline{b}) = \mathcal{L}(A'',\underline{b}'')$$

und das LGS $A''\cdot\underline{x} = \underline{b}''$ ist so übersichtlich, dass man alle Lösungen zu Fuß ausrechnen kann.

Alternativ:

SCHRITT 3:

Markiere Spalten von A'', in denen keine Pivots stehen.
Ändere in diesen Spalten alle Vorzeichen.

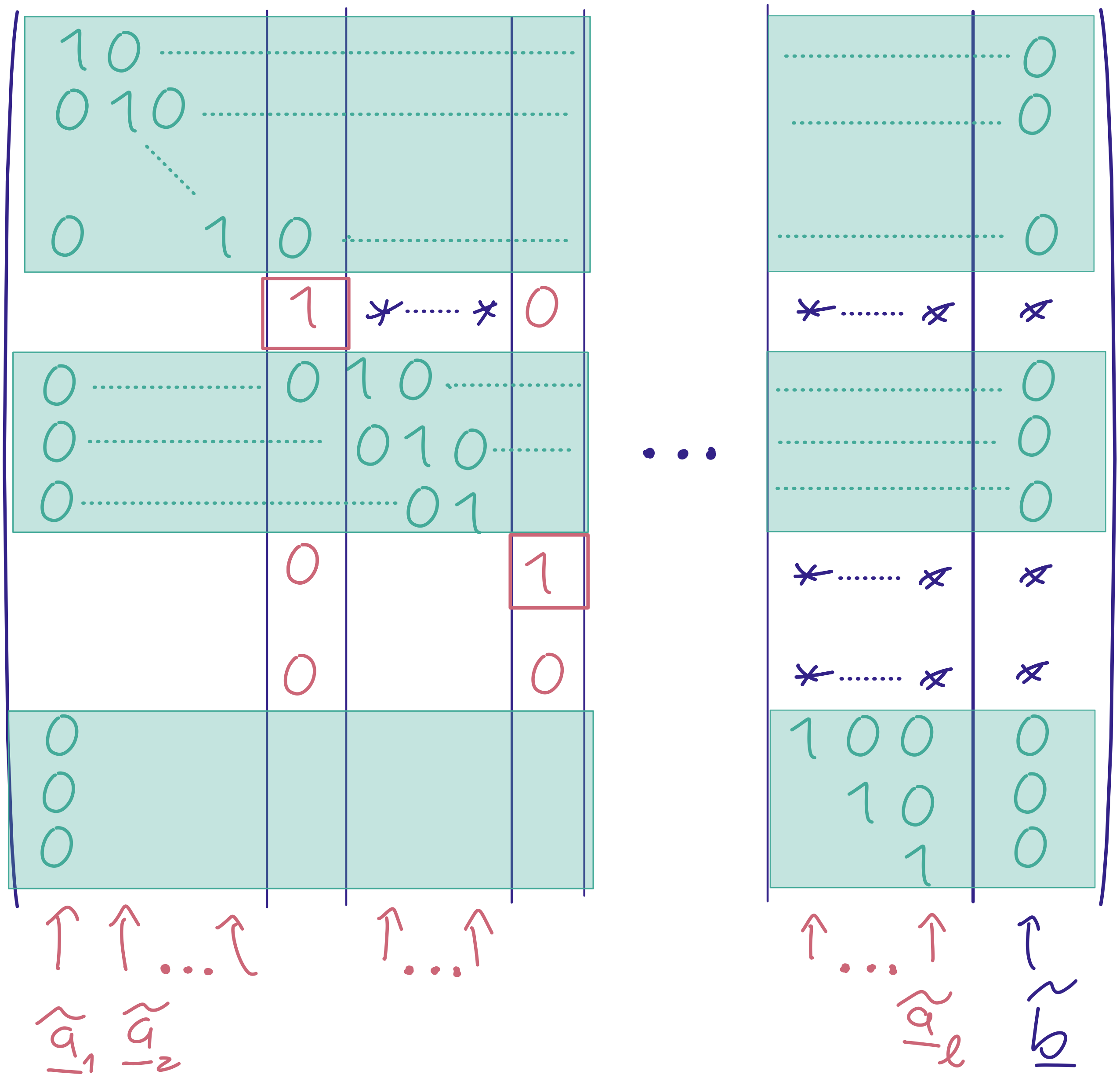
SCHRITT 4:

Füge für jede markierte Spalte j eine ~~Zeile~~ der Form

$$\boxed{(0 \dots 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spalte } j}}{1} \quad 0 \dots 0)}$$

so in $(A'',\underline{b}'')$ ein, dass die neuen 1en zusammen mit den Pivots eine vollständige Diagonale von A'' bilden.

Die Matrix hat nun die Form:



Die markierten Spalten $\tilde{\underline{a}}_1, \dots, \tilde{\underline{a}}_\ell$ bilden nun eine Basis von $\mathcal{L}(A)$ und die letzte Spalte $\tilde{\underline{b}}$ ist eine Lösung des inhomogenen Systems.

$$\mathcal{L}(A) = \langle \tilde{\underline{a}}_1, \dots, \tilde{\underline{a}}_\ell \rangle$$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \tilde{\underline{b}} + \langle \tilde{\underline{a}}_1, \dots, \tilde{\underline{a}}_\ell \rangle$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SCHRITT 1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \multicolumn{6}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\quad 2\quad 1\quad 2\quad 2\quad 2}}^{A'}} & \underline{b'} \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array}\right)$$

SCHRITT 2:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & \cancel{1} & 2 & \cancel{2} & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \rfloor - \\ \rfloor -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & -1 & 0 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array}\right)$$

SCHRITT 3:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 & -8 & -16 \\
0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 8
\end{array}$$

SCHRITT 4:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \underline{\tilde{b}} \\
\boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 & -8 & -16 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\mathcal{L}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

↗ gegeben

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Beweis, dass Rezept 6.28 funktioniert:

Bis einschließlich Schritt 2 ist klar:

$$\mathcal{L}(A''|\underline{b}'') = \mathcal{L}(A|\underline{b}).$$

Nummeriere (um Notation zu vereinfachen) Variablen so um, dass Pivot-Elemente links stehen:

$$(A'', \underline{b}'') = \left(\begin{array}{cccccccc|c}
\boxed{1} & & & & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\ell} & b_1 \\
& \boxed{1} & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
& & \boxed{1} & & & & & & \\
& & & \ddots & & & & & \\
0 & & & & \boxed{1} & a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} & b_r
\end{array}\right)$$

Schritte 3 & 4:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
 & & & & & \downarrow & \downarrow \cdots & \downarrow & \\
\boxed{1} & & & & 0 & -a_{11} & \cdots & -a_{1\ell} & b_1 \\
& \boxed{1} & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
& & \boxed{1} & & & & & & \\
& & & \ddots & & & & & \\
0 & & & & \boxed{1} & -a_{r1} & \cdots & -a_{r\ell} & b_r \\
 & & & & & 1 & & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Wir erhalten:

$$\underline{\tilde{a}}_i = \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \underline{e}_i \in K^\ell \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \ldots, \ell; \quad \underline{\tilde{b}} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

① $\underline{\tilde{a}}_i \in \mathcal{L}(A'')$

$$A'' \cdot \underline{\hat{a}}_i = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} \end{pmatrix} \cdot \underline{e}_i$$

$$= \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ri} \end{pmatrix} = 0$$

② $\underline{\tilde{a}}_1, \ldots, \underline{\hat{a}}_\ell$ sind linear unabhängig, da bereits $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_\ell$ linear unabhängig sind.

③ $$\begin{aligned}\dim(\mathcal{L}(A'')) &= (r+\ell) - rk(A'') \\ &= (r+\ell) - r \\ &= \ell\end{aligned}$$

Rezept 6.27

Also bilden $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_\ell$ nach Basiskriterium 5.13 eine Basis von $\mathcal{L}(A'')$.

④ $\tilde{\underline{b}} \in \mathcal{L}(A'' | \underline{b}''):$

$$A'' \cdot \tilde{\underline{b}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} \end{pmatrix} \cdot \underline{0}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = \underline{b}''.$$

□