Matrizen I

Gesehen: endlich-dim VR $V \cong K^n$

Jetzt: beschreibe alle linearen Abb. $K^n \longrightarrow K^m$.

6.1 Def: Eine $m\times n$-Matrix über K ist ein $\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$-Tupel von Elementen aus K

Notation:

$s_{(1,1)}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} \end{pmatrix} = (s_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$$

Zeile zuerst

Spalte später

mit $s_{ij} \in K$.

6.2 Def: Das **Produkt** einer $m\times n$-Matrix $S = (s_{ij})_{ij}$ mit einem Vektor $\underline{x} = (x_j)_j \in K^n$ ist der Vektor

$$S\cdot\underline{x} := \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j\Big)_i \in K^m$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3 \\ s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{13}x_3 \end{pmatrix}$$

6.3 Satz und Notation:

Das Produkt mit einer $m\times n$-Matrix S definiert eine lineare Abb.

$$f_S : K^n \longrightarrow K^m$$
$$\underline{x} \longmapsto S\cdot\underline{x}$$

Beweis der Linearität:

$$f_S\left((x_j)_j + (y_j)_j\right) = f_S\left((x_j+y_j)_j\right)$$
$$= S\cdot(x_j+y_j)_j$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(x_j+y_j)\right)_i$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}y_j\right)_i$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j\right)_i + \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}y_j\right)_i$$
$$= f_S\left((x_j)_j\right) + f_S\left((y_j)_j\right)$$

$f_S(r\cdot(x_j)_j) = \ldots = r\cdot f_S((x_j)_j)$ für $r\in K$

analog. $\square$

6.4 Hauptsatz, Teil II:

Jede lineare Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^m$ ist von der Form $f = f_S$ für eine eindeutig bestimmte $m \times n$-Matrix S.

Beweis:

Betrachte Standardbasen

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{von } K^n$$

$$\tilde{\underline{e}}_1, \dots, \tilde{\underline{e}}_m \quad \text{von } K^m.$$

Es ist $\boxed{f(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} \tilde{\underline{e}}_i}$ für gewisse eindeutige $s_{ij} \in K$.

Für einen beliebigen Vektor

$$\underline{x} = (x_j)_{j=1,\dots,n} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \underline{e}_j$$

gilt dann:

$$f(\underline{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \underline{e}_j\right) \overset{f \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(\underline{e}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{m} s_{ij} \cdot \tilde{\underline{e}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot x_j \right) \tilde{\underline{e}}_i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot x_j \right)_i$$

$$= f_S(\underline{x}) \quad \text{für} \quad S = (s_{ij})_{ij} \qquad \square$$

Der Beweis zeigt:

$\boxed{\text{Die } j\text{-te Spalte } (s_{ij})_i \text{ von } S \text{ ist das Bild des } j\text{-ten Standardbasisvektors } f(\underline{e}_j).}$

6.5 Satz & Def:

Für K-VR V, W ist der Abbildungsraum

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ K-linear} \}$$

wiederum ein K-VR bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation:

$$\underset{\text{NEU}}{(f + g)}(\underline{v}) := f(\underline{v}) \underset{\text{in } W}{+} g(\underline{v})$$

$$\underset{\text{NEU}}{(s \cdot f)}(\underline{v}) := s \underset{\text{in } W}{\cdot} f(\underline{v})$$

für $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $s \in K$, $\underline{v} \in V$.

Beweis:

SCHRITT 1: Die Menge **aller** Abb.

$$\mathrm{Abb}(V, W) := \{ f : V \to W \}$$

ist mit obigen Verknüpfungen ein K-VR.

Alle VR-Axiome für $\mathrm{Abb}(V, W)$ lassen sich auf VR-Axiome für W zurückführen, z.B.:

(V1) $\underset{\text{NEU}}{s \cdot} (f \underset{\text{NEU}}{+} g) = s \underset{\text{NEU}}{\cdot} f \underset{\text{NEU}}{+} s \underset{\text{NEU}}{\cdot} g$

für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(V, W)$, $s \in K$,

denn: für alle $\underline{v} \in V$ gilt

$$\left(s \cdot_{NEU} (f +_{NEU} g)\right)(\underline{v}) = s \cdot_W \left((f +_{NEU} g)(\underline{v})\right)$$

$$= s \cdot_W \left(f(\underline{v}) +_W g(\underline{v})\right)$$

$$\overset{\text{(V1) gilt in } W}{=} s \cdot_W f(\underline{v}) +_W s \cdot_W g(\underline{v})$$

$$= \dots$$

$$= (s \cdot_{NEU} f +_{NEU} s \cdot_{NEU} g)(\underline{v}).$$

SCHRITT 2:

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \subseteq \mathrm{Abb}(V, W)$$

ist ein UVR.

(i) Nullabbildung $(\underline{v} \mapsto \underline{0})$ ist linear

(ii) f, g linear $\Rightarrow$ $f +_{NEU} g$ linear

(iii) f linear, $s \in K$ $\Rightarrow$ $s \cdot_{NEU} f$ linear

z.B. zu iii:

$$s \cdot_{NEU} f(\underline{v} +_V \underline{v}') = s \cdot_W f(\underline{v} +_V \underline{v}')$$

$$\overset{f \text{ linear}}{=} s \cdot_W \left(f(\underline{v}) +_W f(\underline{v}')\right)$$

$$\overset{\text{V1 für } W}{=} s \cdot_W f(\underline{v}) +_W s \cdot_W f(\underline{v}')$$

$$= (s \cdot_{NEU} f)(\underline{v}) +_W (s \cdot_{NEU} f)(\underline{v}')$$

$$s \cdot_{NEU} f(r \cdot_V \underline{v}) = \dots = r \cdot_W \left(s \cdot_{NEU} f(\underline{v})\right)$$

$\square$

6.6 Satz & Def:

$$\mathrm{Mat}_K(m\times n) := \{m\times n\text{-Matrizen über } K\}$$

ist ein K-VR bezüglich der folgendermaßen definierten Addition und Skalarmultiplikation:

$$(s_{ij})_{ij} \underset{\text{NEU}}{+} (t_{ij})_{ij} := (s_{ij} \overset{\text{in } K}{+} t_{ij})$$

$$r \underset{\text{NEU}}{\cdot} (s_{ij})_{ij} := (r \cdot s_{ij})_{ij}$$

Es ist

$$\mathrm{Mat}_K(n\times m) \underset{(*)}{\cong} K^{n\cdot m}$$

Beweis zu (*):

Definiere

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\qquad\qquad j \end{matrix} & \end{array}$$

Prüfe:

$$(E_{11}, E_{12}, E_{13}, \ldots, E_{1n},$$
$$E_{21}, E_{22}, E_{23}, \ldots, E_{2n},$$
$$\ldots$$
$$\ldots E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn})$$

ist eine Basis. □

6.7 Korollar (aus Hauptsatz 6.4):

$$\mathrm{Mat}_K(m \times n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$
$$S \mapsto f_S$$

ist ein Isomorphismus von VR.

Beweis:

Laut 6.4 ist die Abb. bijektiv

Prüfe Linearität:

① $f_{S \underset{6.6}{+} T} = f_S \underset{6.5}{+} f_T$

② $f_{r \underset{6.6}{\cdot} S} = r \underset{6.5}{\cdot} f_S$

für Matrizen $S = (s_{ij})_{ij}$, $T = (t_{ij})_{ij}$, und für $r \in K$.

zu 1: für $(x_j)_j \in K^n$ gilt

$$f_{S \underset{6.6}{+} T}(x_j)_j = f_{(s_{ij} +_K t_{ij})_{ij}}$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11}+t_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ & & s_{mn}+t_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_j (s_{ij} +_K t_{ij}) \cdot_K x_j \right)_i$$

$$= \left(\sum_j s_{ij} x_j +_K \sum_j t_{ij} x_j \right)_i$$

$$= \left(\sum_j s_{ij} x_j\right)_i \underset{K^m}{+} \left(\sum_j t_{ij} x_j\right)_i$$

$$= S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underset{K^m}{+} T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= f_S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underset{K^m}{+} f_T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(f_S \underset{6.5}{+} f_T\right) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

2 analog. $\square$

Korollar 6.7 bedeutet:

Addition von Matrizen $\hat{=}$ Addition linearer Abb.

Skalarmultiplikation von Matrizen $\hat{=}$ Skalarmultiplikation von linearen Abb.

Frage:

? $\hat{=}$ Komposition

(Antwort: Satz 6.9)

6.8 Def:

Die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(1en auf Diagonale, sonst überall 0).

Das Produkt zweier Matrizen

$$S = (s_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_K(\ell \times m)$$
$$T = (t_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$$

ist gegeben durch

$$S \cdot T := \left(\sum_{j=1}^{m} s_{ij} t_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,\ell \\ k=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}(\ell \times n)$$

Beispiel:

$$T\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{S} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & \boxed{10} \end{pmatrix} \; S \cdot T$$

6.9 Satz: $f_{\mathbb{1}_n} = \mathrm{id}_{K^n}$

$$f_{S\cdot T} = f_S \circ f_T$$

Beweis:

$f_{\mathbb{1}_n} = \mathrm{id}$:

$$f_{\mathbb{1}_n}\big((x_j)_j\big) = \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\cdot x_j\Big)_i = (x_i)_i$$

wobei $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$f_{S\cdot T}\big((x_k)_k\big) = \Big(\sum_k \underbrace{[S\cdot T]_{ik}}_{\substack{\text{Eintrag von } S\cdot T \\ \text{in Zeile } i,\ \text{Spalte } K}} \cdot x_k\Big)_i$$

$$= \Big(\sum_k \Big(\sum_{j=1}^{m} s_{ij} t_{jk}\Big) x_k\Big)_i$$

$$= \Big(\sum_j s_{ij}\cdot\Big(\sum_k t_{jk}\cdot x_k\Big)\Big)_i$$

$$= f_S\Big(\Big(\sum_k t_{jk}\cdot x_k\Big)_j\Big)$$

$$= f_S\Big(f_T\big((x_k)_k\big)\Big). \qquad \square$$

6.10 Korollar

(a) Matrizenmultiplikation ist assoziativ.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind

$$\left(\mathrm{Hom}_K(K^n, K^n), \underset{6.5}{+}, \underset{1.18}{\circ}\right)$$

und $\left(\mathrm{Mat}_K(n \times n), \underset{6.6}{+}, \underset{6.8}{\cdot}\right)$

isomorphe Ringe mit Einselementen id_{K^n} bzw. $\mathbb{1}_n$.

Beweis:

(a) folgt aus Assoziativität von $\circ$ (Satz 1.19) und Satz 6.9.

(b) Satz 6.4 liefert Bijektion, die nach 6.7 & 6.9 mit $+$ und mit $\circ$ bzw. $\cdot$ verträglich ist.

Ringaxiome lassen sich leicht prüfen; z.B. (R3) für $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^n)$:

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h,$$

denn $\forall \underline{x} \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)(\underline{x}) &= (f+g)(h(\underline{x})) \\ &\underset{6.5}{=} f(h(\underline{x})) + g(h(\underline{x})) \\ &= (f\circ h)(\underline{x}) + (g\circ h)(\underline{x}) \\ &\underset{6.5}{=} (f\circ h + g\circ h)(\underline{x})\end{aligned}$$

$\square$

⚠ $\mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist für $n \geq 2$ **nicht** kommutativ!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.11 Def: Eine quadratische Matrix $S \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist *invertierbar*, wenn sie in $\mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ein multiplikatives Inverses S^{-1} besitzt.

6.12 Notiz:
S invertierbar $\Longleftrightarrow$ f_S Isomorphismus.
Dann ist $f_{S^{-1}} = (f_S)^{-1}$.

(folgt unmittelbar aus 6.10 (b))

6.13 Def: Der *Rang* einer Matrix ist der Rang der durch sie definierten linearen Abb.:

$$\mathrm{rk}(S) := \mathrm{rk}(f_S)$$