5.16 Satz:

Sei $f: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung, $(b_i)_{i\in B}$ Basis von V.

(a) f Epimorphismus

$\Longleftrightarrow$ $(f(b_i))_{i\in B}$ Erzeugendensystem von W 1

$\Longleftrightarrow$ $(f(e_i))_{i\in E}$ Erzeugendensystem von W für jedes Erzeugendensystem $(e_i)_{i\in E}$ von V 2

(b) f Monomorphismus

$\Longleftrightarrow$ $(f(b_i))_{i\in B}$ linear unabhängig 1

$\Longleftrightarrow$ $(f(u_i))_{i\in U}$ linear unabhängig für jedes linear unabhängige Tupel $(u_i)_{i\in U}$ in V 2

(c) f Isomorphismus

$\Longleftrightarrow$ $(f(b_i))_{i\in B}$ Basis von W

$\Longleftrightarrow$ $(f(\tilde{b}_i))_{i\in \tilde{B}}$ Basis von W für jede Basis $(\tilde{b}_i)_{i\in \tilde{B}}$ von V.

Beweis:

(a) (surj. $\Rightarrow$ 2)

Sei $(\underline{e}_i)_{i\in E}$ Erzeugendensystem von V.

Jedes $\underline{w} \in W$ ist von der Form $\underline{w} = f(\underline{v})$ für ein $\underline{v} \in V$

Jedes $\underline{v} \in V$ lässt sich schreiben als

$$\underline{v} = \sum_{\substack{i \\ \text{endlich}}} s_i \underline{e}_i.$$

Also

$$\underline{w} = f\Big(\sum_{\substack{i \\ \text{endlich}}} s_i \underline{e}_i.\Big) \underset{f \text{ linear}}{=} \sum_{\substack{i \\ \text{endlich}}} s_i f(\underline{e}_i).$$

(2 $\Rightarrow$ 1) ✓

(1 $\Rightarrow$ surj.) Jedes $\underline{w} \in W$ lässt sich schreiben als

$$\underline{w} = \sum_{\substack{i \\ \text{endliche}}} s_i \cdot f(\underline{b}_i)$$

für gewisse $s_i \in K$. Daher (da f linear)

$$\underline{w} = f\Big(\sum_i s_i \underline{b}_i\Big) \in \operatorname{Im}(f)$$

(b) (inj. $\Rightarrow$ ②)

Sei $(\underline{y}_i)_{i\in U}$ ein linear unabhängiges Tupel. Sei

$$\underbrace{\sum_i s_i f(\underline{y}_i)}_{f\left(\sum_i s_i \underline{y}_i\right)} = \underline{0}$$

Da f injektiv ist, folgt

$$\sum_i s_i \underline{y}_i = \underline{0}.$$

Da $(\underline{y}_i)_{i\in U}$ linear unabh., folgt

$$s_i = 0 \quad \forall i.$$

(② $\Rightarrow$ ①) ✓

(① $\Rightarrow$ inj.) Nutze Injektivitäts-kriterium.

Sei $f(\underline{v}) = \underline{0}$ (z.z: $\underline{v} = \underline{0}$)

Schreibe $\underline{v} = \sum_i s_i \underline{b}_i$. Nach Vorauss. ist

$$f\Big(\sum_i s_i \underline{b}_i\Big) = \underline{0}$$

$$\Vert \quad f \text{ linear}$$

$$\sum_i s_i f(\underline{b}_i)$$

linear unabh.

Es folgt: $s_i = 0 \ \forall i$, also $\underline{v} = \underline{0}$.

(c) folgt aus (a) & (b). $\square$

Satz 5.17 Rangformel
V endlich-dim. VR. Für jede lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ gilt:

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim V - \dim(\ker f)$$

Beweis:
Nach dem Isomorphiesatz 4.25 ist

$$V/\ker(f) \underset{\text{Iso}}{\cong} \operatorname{im}(f)$$

Also ist

$$\Downarrow\ 5.16(c)$$

$$\dim\left(V/\ker(f)\right) = \dim(\operatorname{im}(f))$$

$$\|\ 5.14(b)$$

$$\dim V - \dim(\ker(f)) \qquad \square$$

Def. 5.18: Der **Rang** einer linearen Abbildung ist die Dimension ihres Bildes.

Notation: $\operatorname{rk}(f) := \dim(\operatorname{im} f)$

Satz 5.17 sagt also:

$$\boxed{\operatorname{rk}(f) = \dim V - \dim(\ker f)}$$

Korollar 5.19: Sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abb. zwischen endlich-dim. VR derselben Dimension. Dann sind äquivalent:

(1) f Isomorphismus.
(2) f Monomorphismus.
(3) f Epimorphismus.

(vgl. Satz 1.26).

Beweis:

f Monomorphismus $\overset{\text{Inj.-Kriterium 4.17}}{\iff} \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$

f Epimorphismus $\iff \operatorname{im} f = W$

Satz 5.14(a) $\iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim W$

Nutze nun Rangformel und $\dim W = \dim V$. $\square$