Basen

$$\boxed{\begin{array}{ll} K & \text{Körper} \\ V & K\text{-Vektorraum} \end{array}}$$

5.1 Def: Ein Tupel $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ von Vektoren $\underline{v}_i \in V$ ist ...

(a) ... **Erzeugendensystem** von V, falls $\langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle = V$.

(b) ... **linear unabhängig**, wenn sich die Vektoren $\underline{v}_i$ nur trivial zu $\underline{0}$ linear kombinieren lassen, wenn also gilt:

$$\sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} s_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0} \implies (\forall i \in I: s_i = 0)$$

nur endlich viele $s_i \neq 0$

(c) Eine Basis von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beispiele:

(a) Sei $\underline{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_d := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_d)$ ist ein E-System von K^d:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \underline{e}_1 + \ldots + x_d \cdot \underline{e}_d$$

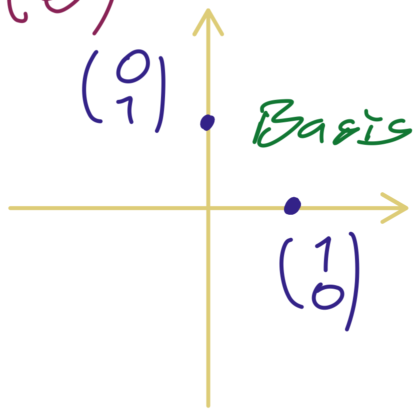
$$\in \langle \{ \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_d \} \rangle$$

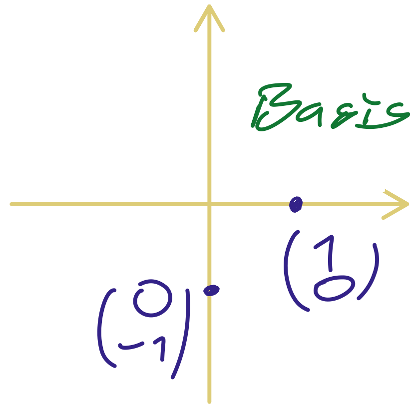
$(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_d)$ ist linear unabhängig:

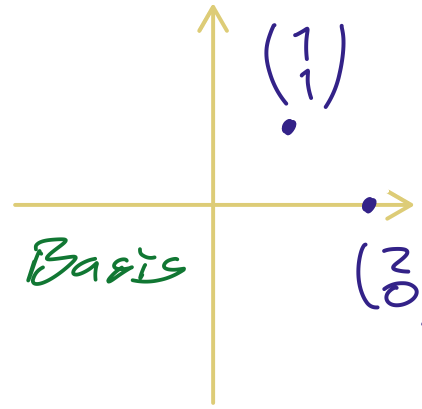
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{d} s_i \underline{e}_i}_{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix}} = \underline{0} \implies s_1 = \ldots = s_d = 0$$

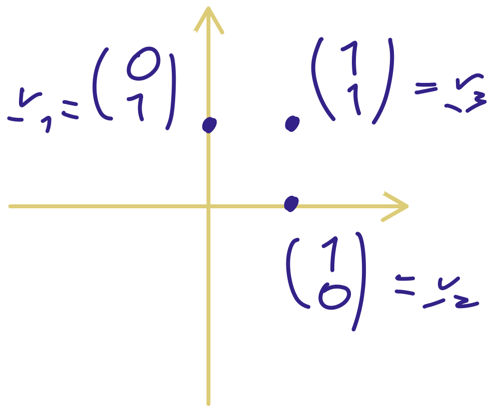
$(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_d)$ heißt Standardbasis von K^d.

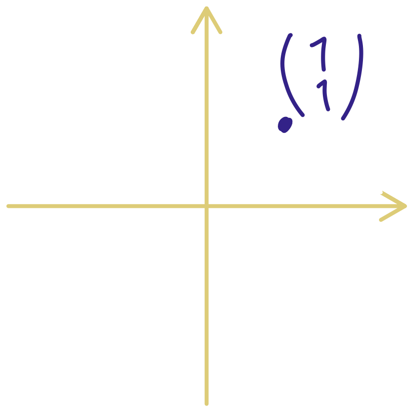
(b)

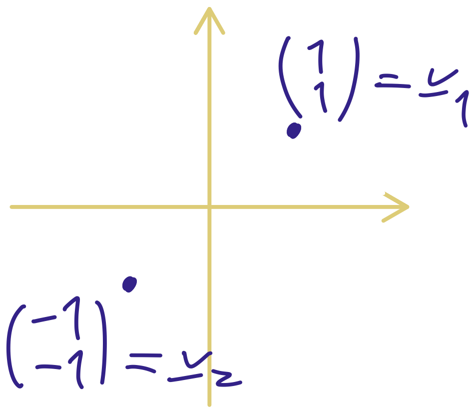












E-System ✓
nicht l. u.:
$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}$

kein E-System
linear unabhängig

kein E-System
nicht l.u.:
$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{0}$

(c) $(\underline{0})$ ist immer linear abhängig $(1 \cdot \underline{0} = \underline{0})$

$(\underline{v})$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist immer linear unabhängig.

$$\left(s \cdot \underline{v} = 0 \overset{}{\underset{4.2}{\iff}} (s = 0 \vee \underline{v} = \underline{0})\right)$$

(d) $V = \mathbb{R}[X]$ ($\mathbb{R}$-VR)

$(1, X, X^2, X^3, X^4, \dots)$ ist

... ein Erzeugendensystem, denn jedes Polynom hat die Form $\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ \text{endlich}}} a_i X^i$ für gewisse $a_i \in K$.

... linear unabhängig, denn ein Polynom ist genau dann Null wenn alle Koeffizienten Null sind.

$\rightsquigarrow (1, X, X^2, X^3, X^4, \dots)$ Basis

Warnung 5.2: Ob $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ E-System ist, hängt nur ab von der **Menge** $\{\underline{v}_i \mid i \in I\}$.

Ob $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist, hängt ab vom **Tupel**.

z.B. für $\underline{v} \neq \underline{0}$:

$(\underline{v})$ linear unabhängig

$(\underline{v}, \underline{v})$ linear abhängig

5.3 Satz: Ein Tupel $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ ist …

(a) … ein Erzeugendensystem von V

$\iff$ jedes $\underline{v} \in V$ hat **mindestens** eine Darstellung der Form

$$\underline{v} = \sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} s_i \cdot \underline{v}_i$$

mit $s_i \in K$.

(b) … linear unabhängig

$\iff$ jedes $\underline{v} \in V$ hat **höchstens** eine solche Darstellung.

(c) … eine Basis

$\iff$ jedes $\underline{v} \in V$ hat **genau** eine solche Darstellung.

Beweis:

(a) Def. von linearer Hülle

(b, $\Leftarrow$) Wende Bedingung an auf $\underline{v} = \underline{0}$:

$$\sum_{i \in I} 0 \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

muss die einzige mögliche Darstellung sein.

(b, $\Rightarrow$) Sei

$$\underline{v} = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} s_i \cdot \underline{v}_i = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} t_i \cdot \underline{v}_i$$

Dann ist

$$\sum_{i \in I} (s_i - t_i) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

Aus linearer Unabhängigkeit folgt: $s_i - t_i = 0 \quad \forall i \in I$

Also $s_i = t_i \quad \forall i \in I$

(c) folgt aus (a) & (b) $\square$

5.4 Korollar:

Ist $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ eine Basis von $\underline{V}$, so ist

$$V \cong \bigoplus_I K$$

via

$$\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} s_i \cdot \underline{v}_i \leftarrow\!\shortmid (s_i)_{i \in I}$$

nur endlich viele $s_i \neq 0$

Insbesondere $V \cong K^n$ falls $|I| = n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Nach Satz 5.3 ist die Abb. bijektiv. Sie ist ferner $\underline{K}$-linear [...], also ein Isomorphismus! $\square$

5.5 Ergänzungslemma

Sei $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabhängig. Für jedes $\underline{v} \in V \setminus \langle\{\underline{v}_i \mid i \in I\}\rangle$ ist auch das um $\underline{v}$ ergänzte Tupel $(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

Beweis:

Sei $s \cdot \underline{v} + \sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} s_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$.

Falls $s \neq 0$, multipliziere mit s^{-1}:

$$\underline{v} + \sum_{i\in I} (s^{-1} \cdot s_i) \cdot \underline{v}_i = \underline{0},$$

also

$$\underline{v} = \sum_{i\in I} (-s^{-1} \cdot s_i) \cdot \underline{v}_i \in \langle\{\underline{v}_i \mid i \in I\}\rangle \quad \lightning$$

Also ist $\boxed{s = 0.}$ Also ist

$$\sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} s_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0},$$

also $\boxed{s_i = 0 \quad \forall i \in I}$ da $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabhängig. $\square$

Satz 5.6 (Charakterisierung von Basen)

(a) Eine Basis ist ein **minimales Erzeugendensystem**:

$(\underline{v}_i)_{i\in I}$ ist Basis $\iff \begin{cases} \langle\{\underline{v}_i \mid i\in I\}\rangle = V, \text{ aber} \\ \langle\{\underline{v}_i \mid i\in J\}\rangle \neq V \\ \text{für } J \subsetneq I \end{cases}$

(b) Eine Basis ist ein **maximales linear unabhängiges Tupel**:

$(\underline{v}_i)_{i\in I}$ ist Basis $\iff \begin{cases} (\underline{v}_i)_{i\in I} \text{ linear \underline{un}abh., aber} \\ (\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I} \text{ linear abhängig} \\ \forall \underline{v} \in V \end{cases}$

Beweis:

(a $\Rightarrow$) $\langle\{\underline{v}_i \mid i\in I\}\rangle = V$ ✓

Angenommen

$$\langle\{\underline{v}_j \mid j\in J\}\rangle = V \text{ für ein } J \subsetneq I.$$

$\exists\, i \in I \setminus J$.

$$\underline{v}_i = \sum_{j\in J} s_j \cdot \underline{v}_j \text{ für gewisse } s_j \in K,$$

also $\underset{\neq 0}{1}\cdot \underline{v}_i + \sum_{j\in J} (-s_j)\cdot \underline{v}_j = \underline{0}$

$\lightning$ $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabh.

Also $\langle\{\underline{v}_j \mid j\in J\}\rangle \neq V$.

(a $\Leftarrow$) z.z.: $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabh.

Sei $\sum_{i\in I} s_i \underline{v}_i = \underline{0}$.

Angenommen, $\exists\, k\in I:\ s_k \neq 0$.

Multipliziere mit s_k^{-1}:

$$\underline{v}_k = \sum_{j\in I\setminus\{k\}} (-s_k^{-1} s_j)\cdot \underline{v}_j \qquad (*)$$

Das zeigt:

$V = \langle\{\underline{v}_i \mid i\in I\}\rangle = \langle\{\underline{v}_j \mid j\in I\setminus\{k\}\}\rangle$ $\lightning$

($(\supseteq)$ klar

$(\subseteq)$ $\sum_{i\in I} t_i \underline{v}_i = t_k \cdot \underline{v}_k + \sum_{j\in I\setminus\{k\}} t_j \cdot \underline{v}_j$

$\overset{(*)}{=} \sum_{j\in I\setminus\{k\}} \left(t_k \cdot s_k^{-1} s_j\right) \cdot \underline{v}_j + \sum_{j\in I\setminus\{k\}} t_j \cdot \underline{v}_j$)

(b $\Rightarrow$) $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ linear unabh. ✓

Sei $\underline{v} \in V$ beliebig. Da $(\underline{v}_i)_{i\in I}$ Erzeugendensystem, $\exists s_i$:

$$\underline{v} = \sum_{i\in I} s_i \cdot \underline{v}_i$$

Also $\underset{\neq 0}{1} \cdot \underline{v} + \sum_{i\in I} (-s_i) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$,

also $(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i\in I}$ linear abhängig.

(b $\Leftarrow$) zz: $V = \langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle$

Falls nicht, $\exists \underline{v} \in V \setminus \langle \{\underline{v}_i \mid i\in I\}\rangle$.

Laut Ergänzungslemma 5.5. folgt dann: $(\underline{v}, \underline{v}_i)$ linear unabhängig $\lightning$

Also $V = \langle \{\underline{v}_i \mid i\in I\} \rangle$ $\square$