d) Lineare Abbildungen

4.12 Def: V, W K-VR

Eine K-lineare Abbildung / VR-Homomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus

$$(V,+) \xrightarrow{f} (W,+),$$

der zusätzlich $\forall s \in K,\ \underline{v} \in V$

$$f(s \cdot \underline{v}) = s \cdot f(\underline{v})$$

erfüllt.

Beispiele:

(a) $\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \underline{v} & \longmapsto & \underline{0} \end{array}$ ist K-linear

(b) $U \subseteq V$ UVR, dann Inklusion $\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & V \\ \underline{u} & \longmapsto & \underline{u} \end{array}$ K-linear

(c) Die Projektionen $\pi_i : K^n \longrightarrow K$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_i$ sind K-linear.

(d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 \cdot x \end{array}$ K-linear

(e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 \cdot x + 1 \end{array}$ nicht K-linear (denn $0 \mapsto 1 \neq 0$)

4.13 Notiz: $\mathrm{id}: V \to V$ ist K-linear. Kompositionen von K-linearen Abb. sind K-linear.

4.14 Def: Ein Vektorraumisomorphismus ist eine K-lineare Abb. $f: V \to W$, für die eine K-lineare Abb. $V \leftarrow W : g$ existiert, sodass gilt:

$$f \circ g = \mathrm{id}_W \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_V .$$

4.15 Satz & Def: Sei $f: V \to W$ K-linear.

f VR-Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f bijektiv.
f VR-Monomorphismus $:\Leftrightarrow$ f injektiv
f VR-Epimorphismus $:\Leftrightarrow$ f surjektiv.
Ein VR-Endomorphismus ist eine K-lineare Abb. $V \to V$.

Ein VR-Automorphismus ist ein VR-Isomorphismus $V \to V$.

Beweis:
($\Rightarrow$) f insbesondere Iso von Mengen, also bijektiv nach Satz 1.23.

($\Leftarrow$) Satz 1.23: $\exists$ Umkehrabb. g
Satz 2.14: g Gruppenhomomorphismus.

Ferner gilt $\forall s \in K, \underline{w} \in W$:

$$g(s\cdot \underline{w}) = g(s\cdot f(g(\underline{w})))$$

$f\circ g = id$

$$= g(f(s\cdot g(\underline{w})))$$

f K-linear

$$= s\cdot g(\underline{w})$$

$g\circ f = id$

$\square$

4.16 Satz: $f: V \longrightarrow W$ K-linear

Der Kern $\ker(f) = f^{-1}(\underline{0}) \subseteq V$
und das Bild $\mathrm{im}(f) = f(V) \subseteq W$
sind UVR.

Beweis: vgl. Satz 2.15. z.B. Bild:

(i) $f(\underline{0}) = \underline{0}$

(ii) Seien $\underline{u}, \underline{u}' \in f(V)$. Dann $\exists\, \underline{v}, \underline{v}' \in V$ mit $\underline{u} = f(\underline{v})$, $\underline{u}' = f(\underline{v}')$.

Also

$$\underline{u} + \underline{u}' = f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = f(\underline{v} + \underline{v}') \in f(V).$$

(iii) Sei $\underline{u} \in f(V)$, $s \in K$.
$\exists\, \underline{v} \in V$: $\underline{u} = f(\underline{v})$.
Also

$$s\cdot \underline{u} = s\cdot f(\underline{v}) = f(s\cdot \underline{v}) \in f(V)$$

$\square$

4.17 Satz (Injektivitätskriterium)

Eine K-lineare Abb. ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern $\{\underline{0}\}$ ist.

(Spezialfall von Injektivitätskriterium 2.16)