Quotientengruppen

$(G,\cdot)$ Gruppe, H Untergruppe

2.17 Def: Die Linksnebenklassen von H in G sind die Teilmengen der Form

$$g\cdot H = \{\boxed{g\cdot h} \mid h\in H\} \qquad (g\in G),$$

die Rechtsnebenklassen sind die Teilmengen

$$H\cdot g = \{h\cdot g \mid h\in H\}.$$

2.18 Satz: Die Linksnebenklassen sind die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation, nämlich der Relation

$$x \sim_H y \;:\Leftrightarrow\; x^{-1}\cdot y\in H$$

(Genauso für Rechtsnebenklassen:

$$x\;{}_H\!\!\sim y \;:\Leftrightarrow\; x\cdot y^{-1}\in H \qquad)$$

Notation: $G/H := G/\sim_H$ (= Menge der Linksnebenklassen von H)

⚠ Im Allgemeinen ist G/H keine Gruppe – aber siehe Satz 2.22

Beweis des Satzes:

$\sim_H$ reflexiv: $x \sim_H x$, denn $\underbrace{x^{-1} \cdot x}_{1} \in H$

$\sim_H$ symmetrisch:

$$\begin{aligned} x \sim_H y &\overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} x^{-1} \cdot y \in H \\ &\Longleftrightarrow (x^{-1} \cdot y)^{-1} \in H \\ &\Longleftrightarrow y^{-1} \cdot x \in H \\ &\Longleftrightarrow y \sim_H x \end{aligned}$$

$\sim_H$ transitiv:

$x^{-1} \cdot y \in H$ und $y^{-1} \cdot z \in H$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^{-1} \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot z)}_{x^{-1} \cdot z} \in H$$

Also ist $\sim_H$ Äquivalenzrelation.

$$\begin{aligned} x \in [y] &\underset{\substack{\text{DEF} \\ \text{von} \\ \text{Äquivalenz-} \\ \text{klasse}}}{\Longleftrightarrow} x \sim_H y \underset{\substack{\text{DEF} \\ \sim_H}}{\Longleftrightarrow} x^{-1} \cdot y \in H \\ &\Longleftrightarrow \exists h \in H: x^{-1} y = h \\ &\Longleftrightarrow \exists h \in H: x^{-1} = h \cdot y^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \exists h \in H: x = y \cdot h^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \exists \tilde{h} \in H: x = y \cdot \tilde{h} \\ &\Longleftrightarrow x \in y \cdot H \end{aligned}$$

D.h.: $[x] = y \cdot H$ $\square$

2.19 Beispiel: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

$G = (\mathbb{Z}, +)$

$H = n \cdot \mathbb{Z} = \{$ganzzahlige Vielfache von $n\}$

Nebenklasse von $x \in \mathbb{Z}$:

$$[x] = \underbrace{x + n \cdot \mathbb{Z}}_{\text{"}x \cdot H\text{"}} = \{x + n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

$$[x] = [x+n] = [x+2n] = \dots,$$

aber jede Nebenklasse hat genau einen Repräsentanten $0 \leq x < n$.

Für dieses x gilt:

$$[x] = \{z \in \mathbb{Z} \mid \text{Rest bei Division von } z \text{ durch } n \text{ ist } x\}$$

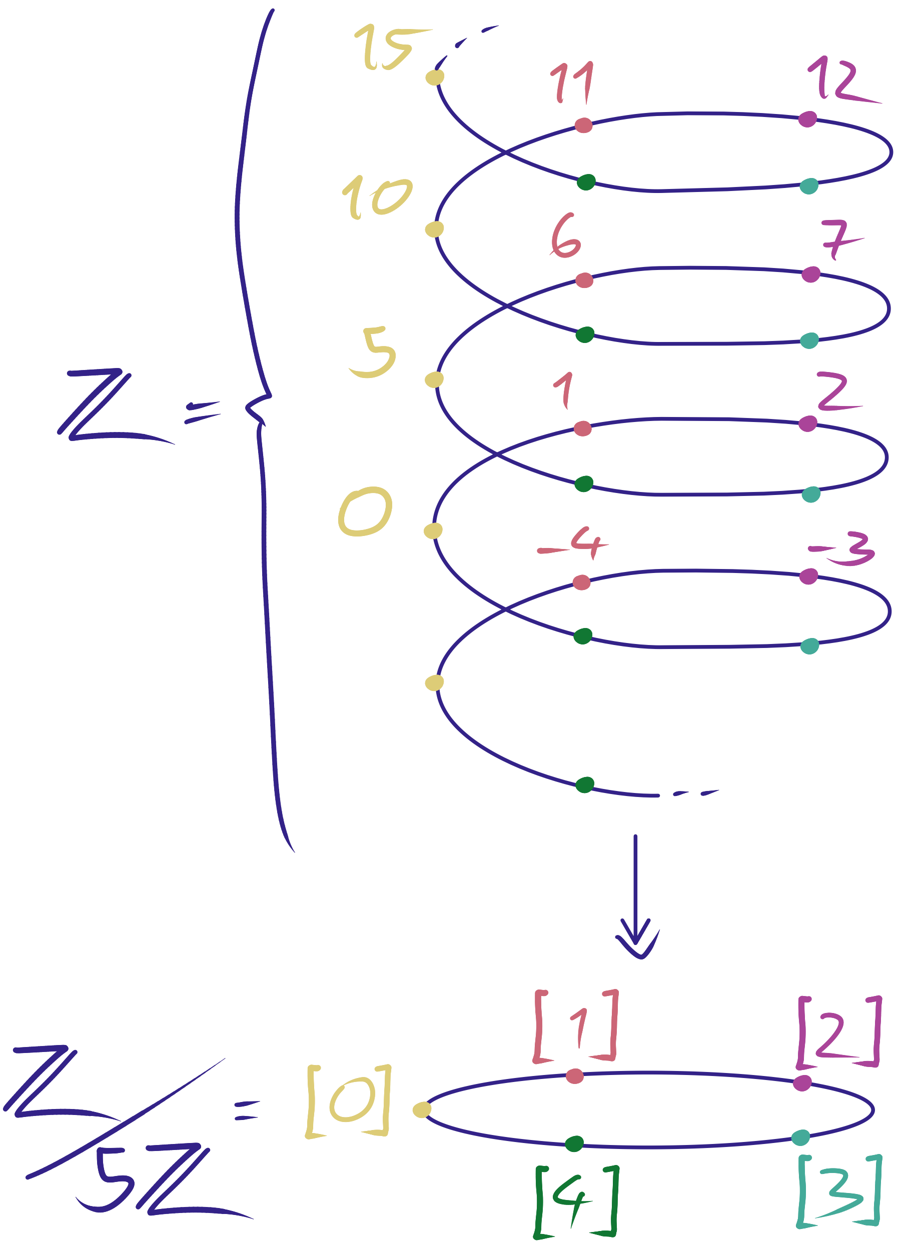
$n = 2$:

gerade Zahlen

ungerade Zahlen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\}$$

$n=5$:



2.20 Def: Eine Untergruppe $H \leq G$ ist **normal**, falls $\forall g \in G$ gilt:

$$g \cdot H = H \cdot g$$

2.21 Notiz: Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ist normal.

Für Teilmengen $A, B \subseteq G$ sei

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Dies definiert eine assoziativ Verknüpfung auf $\mathcal{P}(G)$. Es ist

$$x \cdot H = \{x\} \cdot H$$

2.22 Satz: Ist $H \leq G$ normale Untergruppe, so ist für jedes $x, y \in G$:

$$\boxed{(x \cdot H) \cdot (y \cdot H) = (x \cdot y) \cdot H}$$

Dies definiert eine Gruppenstruktur auf G/H. Für diese Gruppenstruktur ist die kanonische Projektion

$$G \longrightarrow G/H$$

ein Gruppenhomorphismus.

Notation: Schreiben wir $[x]$ für $x \cdot H$, hat die Verknüpfung auf G/H die Form

$$\boxed{[x] \cdot [y] = [x \cdot y]}$$

Beweis des Satzes:

$$\{x\} \cdot \underbrace{H \cdot \{y\}} \cdot H \underset{\text{normal}}{=} \underbrace{\{x\} \cdot \{y\}} \cdot \underbrace{H \cdot H}$$
$$= \{x \cdot y\} \cdot H$$

Wir haben also eine wohldef. Verknüpfung:

$$\boxed{\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (x \cdot H, \; y \cdot H) &\longmapsto (x \cdot y) \cdot H \end{aligned}}$$

assoziativ ✓

neutrales Element: $1 \cdot H = H$

inverse Elemente: $(x \cdot H)^{-1} = x^{-1} H$

Projektion Homomorphismus: Übung. $\square$

Beispiel:

In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $[1] + [4] = [1+4] = [5] = [0]$

$[2] + [1] = [3]$

$[4] + [4] = [8] = [3]$

In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $[1] + [1] = [0]$

2.23 Satz: Für einen Gruppenhomomorphismus $f: (G, \cdot) \longrightarrow (K, \circ)$ ist

$$\sim_{\ker f} \;=\; {}_{\ker f}\!\sim \;=\; \sim_f,$$

und daher $\forall g \in G$:

$$\underset{\text{LNK}}{g \cdot \ker(f)} = \underset{\text{RNK}}{\ker(f) \cdot g} = f^{-1}(f(g))$$

2.24 Korollar: Der Kern ist stets normal.

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned}
x \sim_f y &\iff f(x) = f(y) && \text{Def. } \sim_f \text{;} \\
&\iff f(x) \cdot f(y)^{-1} = 1 && 1.27\,(iii) \\
&\iff f(x \cdot y^{-1}) = 1 \\
&\iff x \cdot y^{-1} \in \ker(f) \\
&\iff x \; {}_{\ker(f)}\!\sim \; y
\end{aligned}$$

Also $\sim_f \;=\; {}_{\ker(f)}\!\sim$.

$\sim_f \;=\; \sim_{\ker(f)}$ ähnlich.

Also stimmen die entsprechenden Äquivalenzklassen überein. $\square$

2.25 Isomorphiesatz: Jeder Gruppenhomomorphismus lässt sich faktorisieren als

$$\begin{tikzcd}
(G,\cdot) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "q"'] & & (K,\circ) \\
\boxed{G/_{\ker(f)} \arrow[r, "\bar{f}", "\cong"'] & \operatorname{im}(f)} \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$[x] \longmapsto f(x)$$

Es ist q die kanonische Projektion (surjektiv) und i die Inklusion (injektiv).
Alle diese Abb. sind Gruppenhomomorph.

Beispiel:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z},+) \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot) \\
(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+) \arrow[r, "\cong"] & (\{+1,-1\},\cdot) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

$z \longmapsto (-1)^z$

$z \mapsto$

$[z] = \begin{cases} [0] & \text{falls } z \text{ gerade} \\ [1] & \text{falls } z \text{ ungerade} \end{cases}$

$[z] \longmapsto (-1)^z$

$\ker f = \{z \in \mathbb{Z} \mid (-1)^z = 1\}$
$= 2\mathbb{Z}$

Beweis: Nach Satz 1.32 und Satz 2.22 ist nur noch zu zeigen:

$$\bar f \text{ ist Homomorphismus}$$

Seien also $[x], [y] \in G/\ker f$.

$$\bar f([x]\cdot[y]) \underset{2.21}{=} \bar f([x\cdot y]) \overset{\text{Def. } \bar f}{=} f(x\cdot y)$$

$$\underset{f \text{ Homo.}}{=} f(x)\circ f(y) = \bar f([x]) \circ \bar f([y])$$

$\square$