Gruppenhomomorphismen

2.10 Def: Seien $(G, \cdot)$ und $(K, \circ)$ Gruppen. Ein **Gruppenhomomorphismus**

$$f : (G, \cdot) \longrightarrow (K, \circ)$$

ist eine Abbildung $f : G \to K$, für die gilt:

$$\forall x, y \in G : \quad f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$$

2.11 Notiz: Für jeden Gruppenhomomorphismus f gilt:

$$f(1_G) = 1_K$$

$$\forall x \in G : \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

Beweis: (a)

$$1_G \cdot 1_G = 1_G \quad | f$$

$$f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G)$$

$$f(1_G) \circ f(1_G) = f(1_G) \quad \Big| \circ [f(1_G)]^{-1}$$

$$f(1_G) \circ 1_K = 1_K$$

$$f(1_G) = 1_K$$

(b)

$$x^{-1} \cdot x = 1_G = x \cdot x^{-1} \quad | f$$

$$f(x^{-1}) \circ f(x) = 1_K = f(x) \circ f(x^{-1}) \quad \text{wegen (a)}$$

Also $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ wegen Eindeutigkeit von Inversen (2.4) $\square$

Bsp:

- $(\mathbb{Z},+) \hookrightarrow (\mathbb{Q},+)$ Gruppenhomomorph.
- $(H,\cdot) \hookrightarrow (G,\cdot)$ Gruppenhomomorph. für jede Untergruppe H von G.
- $(\mathbb{Z},+) \longrightarrow (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $x \longmapsto 5^x$ Gruppenhomomorph. denn $5^{x+y} = 5^x \cdot 5^y$
- $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q},+)$, $x \longmapsto x$ kein Gruppenh., denn $2\cdot 3 \neq 2+3$
- Für beliebige Gruppen $(G,\cdot)$, $(K,\circ)$ ist die konstante Abbildung

$$\begin{aligned}(G,\cdot) &\longrightarrow (K,\circ)\\ g &\longmapsto 1_K\end{aligned}$$

Gruppenhomomorphismus.

2.12 Notiz:

- Für jede Gruppe $(G,\cdot)$ ist
$$\mathrm{id}_G : (G,\cdot) \longrightarrow (G,\cdot)$$
ein Gruppenhomomorphismus.

- Sind $(G_1,\cdot) \xrightarrow{f_1} (G_2,\circ)$ und $(G_2,\circ) \xrightarrow{f_2} (G_3,*)$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch
$$(G_1,\cdot) \xrightarrow{f_2 \circ f_1} (G_3,*)$$
ein Gruppenhomomorphismus.

2.13 Def: Ein **Gruppenisomorphismus** ist ein Gruppenhomomorphismus
$$f : (G,\cdot) \longrightarrow (K,*),$$
für den ein Gruppenhomomorphismus
$$(G,\cdot) \longleftarrow (K,*) : g$$
existiert, sodass gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_K$
und $g \circ f = \mathrm{id}_G$.

Zwei Gruppen sind **isomorph**, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

2.14 Satz & Def:

Sei f ein Gruppenhomomorphismus.

f Gruppenisomorphismus $\Longleftrightarrow$ f bijektiv (als Abb. von Mengen)

f Gruppenepimorphismus $:\Longleftrightarrow$ f surjektiv

f Gruppenmonomorphismus $:\Longleftrightarrow$ f injektiv

Beweis:

($\Rightarrow$) f ist insbesondere Iso von Mengen, also bijektiv nach Satz 1.23.

($\Leftarrow$) Nach Satz 1.23 existiert jedenfalls eine Abbildung

$$G \longleftarrow K : g$$

mit $f \circ g = \mathrm{id}_K$

$g \circ f = \mathrm{id}_G$.

n.z.z.: g ist Gruppenhomomorphismus. Sei dazu $x, y \in K$.

$$\begin{aligned}
g(\boxed{x} * \boxed{y}) &= g\left(\boxed{\mathrm{id}_K(x)} * \boxed{\mathrm{id}_K(y)}\right) \\
&= g\left(f(g(x)) * f(g(y))\right) \\
&\overset{f \text{ Homomorphismus}}{=} \underbrace{g\big(f}_{\mathrm{id}_G}\big(g(x) \cdot g(y)\big)\big) \\
&= g(x) \cdot g(y)
\end{aligned}$$

$\square$

2.15 Satz & Def:
Sei $f: (G,\cdot) \longrightarrow (K,*)$ Gruppenhomomorphismus.
Dann sind das **Bild**

$$\mathrm{im}(f) := f(G) \leq (K,*)$$

und der **Kern**

$$\ker(f) := f^{-1}(1_K) \leq (G,\cdot)$$

Untergruppen.

Beweis: Benutze Notiz 2.9.
Ker: (i) $1_G \in \ker(f)$, denn $f(1_G) = 1_K$ nach 2.11.

(ii) Seien $x,y \in \ker(f)$, also $f(x) = 1_K$ und $f(y) = 1_K$.
Dann ist

$$f(x\cdot y) = f(x) * f(y) = 1_K * 1_K = 1_K,$$

also $x \cdot y \in \ker(f)$

(iii) Sei $x \in \ker(f)$, also $f(x) = 1_K$.
Dann ist

$$f(x^{-1}) \underset{(2.11)}{=} [f(x)]^{-1} = (1_K)^{-1} = 1_K.$$

Also $x^{-1} \in \ker(f)$.
Bild: ähnlich (Übung) $\square$

2.16 Injektivitätskriterium

Ein Gruppenhomomorphismus ist genau dann injektiv, wenn sein Kern trivial ist.

(d.h. Kern besteht nur aus dem neutralen Element)

Beweis: $f : (G, \cdot) \longrightarrow (K, *)$

(⇒) injektiv heißt jede Faser hat höchstens ein Element, also $|\ker(f)| \leq 1$.

Wegen $f(1_G) = 1_K$, also stets $1_G \in \ker(f)$.

Also $\{1_G\} = \ker(f)$.

(⇐) Sei $\ker f = \{1_G\}$.

Seien $x, y \in G$ mit $f(x) = f(y)$.

Dann ist

$$\underbrace{f(x) * f(y)^{-1}} = 1_K$$

$$f(x \cdot y^{-1}) = 1_K$$

also $x \cdot y^{-1} \in \ker f$,

also nach Voraussetzung

$$x \cdot y^{-1} = 1_G \quad \Big| \cdot y$$

$$x = y$$

$\square$