5L-45

Lineare Algebra I: Klausur I

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2021

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Das Tragen einer medizinischen Maske oder einer FFP2-Maske ist während der gesamten Klausur vorgeschrieben.
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ & & -x_2 & & & + & 3x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & t \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & 2 \end{array}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \mathbf{b})$ für das System auf. Formen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenoperationen so in eine Matrix $(A' \mid \mathbf{b}')$ um, dass A' Zeilenstufenform hat.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(A)$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Geben Sie ferner in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $\mathcal{L}(A \mid \mathbf{b})$ des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 1
(Seite 4)

Aufgabe 1
(Seite 5)

Aufgabe 2
Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \mathbb{R}^3 \qquad\qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y - 2z = 0 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' Basen sind von V:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \qquad\qquad C := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad\qquad C' := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$${}_{C}M_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_{C'}M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

(1) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen A und B ist **surjektiv**, wenn

☐ jedes Element von B ein Urbild unter f besitzt.

☐ jedes Element von A auf mindestens ein Element in B abgebildet wird.

☐ der Kern von f trivial ist.

(2) Folgende Relationen auf der Menge $\mathbb{R}$ sind **reflexiv**:

☐ $x \sim y \Leftrightarrow x = y^2$

☐ $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot |y| = y \cdot |x|$

☐ $x \sim y \Leftrightarrow x + y \geq 0$

(3) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (a,b) &\mapsto (a,b,0) \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\ z &\mapsto \|z\| \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \frac{a^2}{b} &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(4) Für eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen A und B gilt:

☐ Ist A endlich und f surjektiv, so ist auch B endlich.

☐ Ist $|B| \geq |A|$, so ist f injektiv.

☐ Ist $|B| = |A|$ endlich und f injektiv, so ist f bereits bijektiv.

(5) Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B und seien M und N Teilmengen von A. Es gilt:

☐ $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.

☐ $f(M \setminus N) = f(M) \setminus f(N)$.

☐ $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.

(6) Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ bilden zusammen mit der Multiplikation von komplexen Zahlen eine Gruppe:

☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ ($\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet den Realteil der komplexen Zahl z)

☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\} \setminus \{0\}$

☐ $\{1, -1, i, -i\}$

(7) Bekanntlich ist ein Ring $(R, +, \cdot)$ **kommutativ**, wenn die Verknüpfung $\cdot$ kommutativ ist. Die folgenden Ringe sind kommutativ:

☐ $\mathbb{Q}$

☐ $\mathbb{Z}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{Z}$ mit üblicher Addition und Multiplikation von Polynomen)

☐ $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ (Ring der komplexen 2×2-Matrizen)

(8) Für jeden **Körper** K gilt:

☐ $1 + 1 \neq 0$ in K.

☐ Sind $a, b \in K$ mit $a^3 = b^3$, so folgt $a = b$.

☐ Sind $a, b \in K$ mit $(ab)^2 = 0$, so folgt bereits $a = 0 \vee b = 0$.

Aufgabe 4
Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auffassen.
- ☐ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen.
- ☐ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über den irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ auffassen.

(2) Zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ in einem Vektorraum V sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

- ☐ $\mathbf{v} \notin \langle \mathbf{w} \rangle$.
- ☐ $\langle \mathbf{v} \rangle \cap \langle \mathbf{w} \rangle = \{\mathbf{0}\}$.
- ☐ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ und $\langle \mathbf{v} \rangle \cap \langle \mathbf{w} \rangle = \{\mathbf{0}\}$.

(3) Wie viele **1-dimensionale** Untervektorräume hat der $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^2$?

- ☐ 4
- ☐ 8
- ☐ unendlich viele

(4) Die folgenden Abbildungen sind $\mathbb{C}$-**linear**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} z' \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2) &\to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$

(5) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ haben **vollen Rang**:

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ und einen Skalar $\lambda \in K$ gilt:

- ☐ $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \det(A)$.
- ☐ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, falls A invertierbar ist.
- ☐ $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(7) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ und $\lambda \in K$ gilt:

- ☐ Die Matrix $A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n$ ist invertierbar, falls λ kein Eigenwert von A ist.
- ☐ Die Matrix $A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n$ ist die Nullmatrix, falls λ ein Eigenwert von A ist.
- ☐ Existiert ein Vektor $v \in K^n$ mit $Av = \lambda v$, so ist λ ein Eigenwert von A.

Aufgabe 5
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien A und B Teilmengen von V. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils:

(a) $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A \cup B\rangle$

(b) $\langle A \cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$

(c) Aus der Gleichheit $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle = \langle A \cup B\rangle$ folgt $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$ oder $\langle B\rangle \subseteq \langle A\rangle$.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 5
(Seite 15)

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und sei $f\colon \operatorname{Mat}_K(3 \times 3) \to K$ eine **lineare Abbildung** mit $f(\mathbb{1}_3) = 3$. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Gleichung

$$f(A \cdot B) = f(B \cdot A)$$

für alle $A, B \in \operatorname{Mat}_K(3 \times 3)$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass f die Spurabbildung sein muss.

Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_K(n \times n)$ ist die Summe $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ ihrer Diagonalelemente.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 6
(Seite 18)