

1 | Nachtrag

Seien $A, B \in \text{Mat}_K(n \times m)$ und $f_A, f_B: K^m \rightarrow K^n$ die assoziierten linearen Abbildungen. Zeigen Sie, dass f_A und f_B dasselbe Bild haben, falls B aus A durch elementare Spaltenoperationen hervorgeht.

Elementare Spaltenoperationen entsprechen Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen (Satz 6.20). ①

Greht B aus A durch elementare Spaltenoperationen hervor, ist also $B = A \cdot S$ für ein Produkt von Elementarmatrizen S . Da Elementarmatrizen invertierbar sind (Korollar 6.21), ist auch S invertierbar. ①

Nun gilt:

$$\text{im}(f_B) = \text{im}(f_{A \cdot S}) = \text{im}(f_A \circ f_S), \quad \text{①}$$

wobei f_S ein Isomorphismus ist. Es bleibt, zu zeigen:

$$\text{im}(f_A \circ f_S) = \text{im}(f_A).$$

(\subseteq) Ist $\underline{v} \in \text{im}(f_A \circ f_S)$, so ist $\underline{v} = f_A(f_S(\underline{w}))$ für ein \underline{w} ,
also $\underline{v} = f_A(\underline{y})$ für $\underline{y} := f_S(\underline{w})$.

Also ist $\underline{v} \in \text{im}(f_A)$. ①, S

(\supseteq) Ist $\underline{v} \in \text{im}(f_A)$, so ist $\underline{v} = f_A(\underline{y})$ für ein \underline{y} .

Wähle $\underline{w} := f_S^{-1}(\underline{y})$ (möglich, da f_S Isomorphismus).

Dann ist $\underline{v} = f_A \circ f_S(\underline{w})$.

Also $\underline{v} \in \text{im}(f_A \circ f_S)$. ①, S

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass die folgenden Untervektorräume von \mathbb{R}^4 identisch sind:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{im}(f_A) \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{im}(f_B) \quad \text{für} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{im}(f_C) \quad \text{für} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und C geht aus B und B geht aus A durch elementare Spaltenoperationen hervor:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \begin{matrix} \swarrow - \\ \downarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A \end{array} & \xrightarrow{\text{0,5}} & \begin{array}{c} \begin{matrix} \swarrow -2 \\ \downarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B \end{array} & \xrightarrow{\text{0,5}} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & & C \end{array}$$

2 | Nullsumme

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Unter einer nilpotenten Matrix ist jeweils eine $(n \times n)$ -Matrix N mit $n \geq 1$ über einem beliebigen Körper zu verstehen, für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $N^k = 0$.

(a) Für jede nilpotente Matrix N ist die Matrix $\mathbb{1}_n + N$ invertierbar.

Beweis:

Nach Annahme existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $N^k = 0$.

$$\text{Def. } M := \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i.$$

$$\begin{aligned} M \cdot (\mathbb{1} + N) &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i + \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} N^i \quad \text{Index } i \text{ verschoben} \\ \text{erster Summand in Summe oben} &\rightarrow \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i N^i + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} N^i \\ &= \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} (-N^i + N^i) \quad N^k = 0 \text{ weggelassen} \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

Das zeigt, dass M ein Linksinverses für $\mathbb{1} + N$ ist.

Da $\mathbb{1} + N$ eine quadratische Matrix ist, folgt, dass M auch ein Rechtsinverses und somit $\mathbb{1} + N$ invertierbar ist (Satz 6.35). ① □

(b) Jede nilpotente Matrix ist ähnlich zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix (also zu einer oberen Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge Null sind).

Beweis:

Nach Satz 15.16 existiert zu jeder nilpotenten Matrix N eine Jordانبasis B mit zugehöriger JNF

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1, 0)} & & & 0 \\ & \boxed{J(m_2, 0)} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \boxed{J(m_k, 0)} \end{pmatrix} \quad \text{mit } J(m_i, 0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist \hat{N} eine strikte obere Dreiecksmatrix und

$$N = B \hat{N} B^{-1}, \text{ also ist } N \text{ ähnlich zu } \hat{N}. \quad \text{① □}$$

(c) Jede nilpotente Matrix hat einen nicht-trivialen Kern.

Beweis:

Sei $N \in \text{Mat}_K(n \times n)$ nilpotent, $f_N: K^n \rightarrow K^n$ der assoziierte Endomorphismus. Per Def. $\ker(N) = \ker(f_N)$.

Angenommen, $\ker f_N$ ist trivial. Dann folgt aus Kor. 5.19, dass f_N ein Isomorphismus ist, und somit, dass N invertierbar ist. Dann folgt aber aus $N^k = 0$ durch Multiplikation mit N^{-k+1} : $N = 0$.

Also ist $\ker(N) = K^n$ doch nicht-trivial \downarrow .

Also ist $\ker(N)$ nicht-trivial. ① \square

(d) Die Summe zweier nilpotenter Matrizen ist wieder nilpotent.

Gegenbeispiel:

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $N_1^2 = N_2^2 = 0$, aber $N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar und somit nicht nilpotent. ①

(e) Das Produkt zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

Gegenbeispiel:

N_1, N_2 wie in (d). $M := N_1 \cdot N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht nilpotent, denn $M^2 = M$ und somit $M^k = M \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. ①

3 | eirtemmyS

Sei B eine Bilinearform auf einem K -Vektorraum V .

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$B^\# : V \rightarrow V^* \\ v \mapsto B(v, -)$$

eine wohldefinierte K -lineare Abbildung gegeben ist.

Für jedes $v \in V$ ist $B^\#(v)$ eine Linearform auf V :

Für $u, u_1, u_2 \in V, a \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} B^\#(v)(u_1 + u_2) &= B(v, u_1 + u_2) \\ &= B(v, u_1) + B(v, u_2) \quad (\text{Linearität von } B \\ &= B^\#(v)(u_1) + B^\#(v)(u_2) \quad \text{in 2. Eintrag}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^\#(v)(a \cdot u) &= B(v, a \cdot u) \\ &= a \cdot B(v, u) \quad (\text{Linearität von } B \\ &= a \cdot B^\#(v)(u) \quad \text{in 2. Eintrag}) \end{aligned}$$

$B^\#$ ist linear:

Für jedes $v_1, v_2 \in V$ gilt $B^\#(v_1 + v_2) = B^\#(v_1) + B^\#(v_2)$,
denn für jedes $u \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (B^\#(v_1 + v_2))(u) &= B(v_1 + v_2, u) \\ &= B(v_1, u) + B(v_2, u) \quad (\text{Linearität von } B \\ &= B^\#(v_1)(u) + B^\#(v_2)(u) \quad \text{in 1. Eintrag}) \\ &= (B^\#(v_1) + B^\#(v_2))(u) \quad (\text{Def. von } + \text{ auf } V^*) \end{aligned}$$

Für jedes $v \in V, a \in K$ gilt: $B^\#(a \cdot v) = a \cdot B^\#(v)$,
denn für alle $u \in V$ gilt: $(\text{Linearität von } B \text{ in 1. Eintrag})$

$$\begin{aligned} (B^\#(a \cdot v))(u) &= B(a \cdot v, u) = a \cdot B(v, u) \\ &= a \cdot (B^\#(v)(u)) \\ &= (a \cdot B^\#(v))(u) \quad (\text{Def. von Skalarmult. auf } V^*) \end{aligned}$$

2,5

(b) Zeigen Sie, dass B genau dann symmetrisch ist, wenn für den Bidualraumhomomorphismus ω_V gilt: $(B^\#)^* \circ \omega_V = B^\#$.

Für $v, w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} ((B^\#)^* \circ \omega_V)(v)(w) &= ((B^\#)^*(\omega_V(v)))(w) \\ &= (\omega_V(v))(B^\#(w)) && \text{(Def. von } (\cdot)^*) \\ &= B^\#(w)(v) && \text{(Def. } \omega_V) \\ &= B(w, v). \\ (B^\#(v))(w) &= B(v, w). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$(B^\#)^* \circ \omega_V = B^\# \Leftrightarrow B(w, v) = B(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

$\Leftrightarrow B$ symmetrisch.

2,5

4 | Kern

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraum U und eine lineare Abbildung $i: U \rightarrow V$ mit folgender universeller Eigenschaft gibt: Es ist $f \circ i = 0$, und für jeden Vektorraum T und jede lineare Abbildung $t: T \rightarrow V$ mit der Eigenschaft $f \circ t = 0$ existiert genau eine lineare Abbildung $t': T \rightarrow U$ mit $i \circ t' = t$.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{f} & W \\ \exists! \uparrow & & \nearrow & & \\ T & & & & \end{array}$$

Zeigen Sie ferner, dass U durch diese universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt ist.

Existenz: Wähle $U := \ker(f)$,

$i: U \rightarrow V$ kanonische Inklusion.

Dann ist offenbar $f \circ i = 0$, denn $f(v) = 0$ für alle $v \in \ker(f)$.

Sei nun $t: T \rightarrow V$ gegeben mit $f \circ t = 0$.

Dann gilt für jedes $x \in T$: $t(x) \in \ker f$,

$$\text{denn } f(t(x)) = (f \circ t)(x) = 0.$$

Also können wir t' definieren durch

$$t': T \rightarrow \ker f \\ x \mapsto t(x).$$

Ist $t'': T \rightarrow \ker f$ eine weitere lineare Abb.

mit $i \circ t'' = t$, so gilt für alle $x \in T$: $t''(x) = t(x)$.

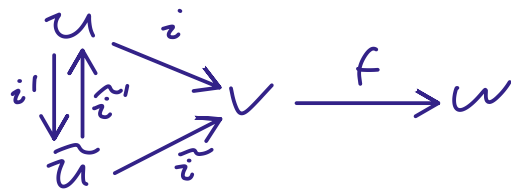
Also ist $t'' = t'$. Also ist t' eindeutig.

2,5

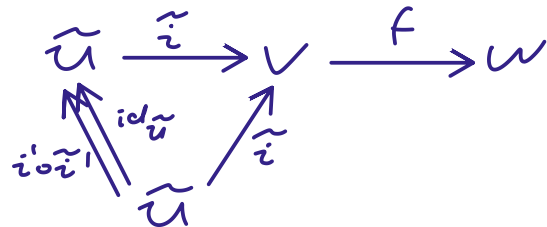
Eindeutigkeit: Sei (U, i) und (\tilde{U}, \tilde{i}) mit obiger \mathcal{U} gegeben. Da $f \circ \tilde{i} = 0$ ist, liefert uns die \mathcal{U} von (U, i) eine lineare Abbildung \tilde{i}' mit

(a) $i \circ \tilde{i}' = \tilde{i}$. Analog erhalten wir aus der \mathcal{U} von (\tilde{U}, \tilde{i}) eine lineare Abbildung i' mit

(b) $\tilde{i} \circ i' = i$.



Betrachte $i' \circ \tilde{i}'$ und $\text{id}_{\tilde{U}}$:



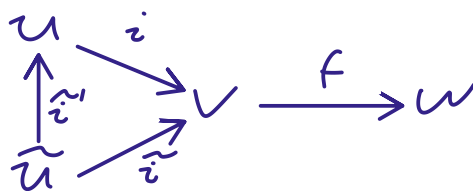
Es ist sowohl $\tilde{i} \circ \text{id}_{\tilde{U}} = \tilde{i}$
als auch $\tilde{i} \circ (i' \circ \tilde{i}') = (\tilde{i} \circ i') \circ \tilde{i}'$
 $\stackrel{(b)}{=} i \circ \tilde{i}'$
 $\stackrel{(a)}{=} \tilde{i}$

Also folgt aus der Eindeutigkeit in der $\mathcal{L}\mathcal{E}$ von (\tilde{U}, \tilde{i}) : $i' \circ \tilde{i}' = \text{id}_{\tilde{U}}$

Analog folgt aus der Eindeutigkeit in der $\mathcal{L}\mathcal{E}$ von (U, i) : $\tilde{i}' \circ i' = \text{id}_U$

Also sind i' und \tilde{i}' zueinander inverse Isomorphismen. Also sind U und \tilde{U} isomorph.

Aus der Eindeutigkeit in der $\mathcal{L}\mathcal{E}$ von U folgt ferner, dass \tilde{i}' der einzige Isomorphismus ist, für den



Kommutiert.

(2,5)