1 | Nachtrag

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n \times m)$ und $f_A, f_B \colon K^m \to K^n$ die assozierten linearen Abbildungen. Zeigen Sie, dass f_A und f_B dasselbe Bild haben, falls B aus A durch elementare Spaltenoperationen hervorgeht.

Elementare Spaltenoperationen entsprechen Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen (Satz 6.20). 1

Geht B aus A durch elementare Spaltenoperationen hervor, ist also $B = A \cdot S$ für ein Produkt von Elementarmatrizen S. Da Elementarmatrizen invertierbar sind (Korollar 6.21), ist auch S invertierbar. 1

Nun gilt:

$$\mathrm{im}(f_B) = \mathrm{im}(f_{A \cdot S}) = \mathrm{im}(f_A \circ f_S), \qquad 1$$

wobei f_S ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen:

$$\mathrm{im}(f_A \circ f_S) = \mathrm{im}(f_A).$$

($\subseteq$) Ist $\underline{v} \in \mathrm{im}(f_A \circ f_S)$, so ist $\underline{v} = f_A(f_S(\underline{w}))$ für ein $\underline{w}$,
also $= f_A(\underline{u})$ für $\underline{u} := f_S(\underline{w})$.
Also ist $\underline{v} \in \mathrm{im}(f_A)$. 0,5

($\supseteq$) Ist $\underline{v} \in \mathrm{im}(f_A)$, so ist $\underline{v} = f_A(\underline{u})$ für ein $\underline{u}$.
Wähle $\underline{w} := f_S^{-1}(\underline{u})$ (möglich, da f_S Isomorphismus).
Dann ist $\underline{v} = f_A \circ f_S(\underline{w})$.
Also $\underline{v} \in \mathrm{im}(f_A \circ f_S)$. 0,5

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$ identisch sind:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{im}(f_A) \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\3&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{im}(f_B) \quad \text{für} \quad B = \begin{pmatrix}3&2&0\\1&1&0\\2&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{im}(f_C) \quad \text{für} \quad C = \begin{pmatrix}-1&2&2\\-1&1&1\\2&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}$$

und C geht aus B und B geht aus A durch elementare Spaltenoperationen hervor:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\3&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{B}{\begin{pmatrix}3&2&0\\1&1&0\\2&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{C}{\begin{pmatrix}-1&2&2\\-1&1&1\\2&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}}$$

0,5 0,5

2 | Nullsumme

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Unter einer nilpotenten Matrix ist jeweils eine $(n \times n)$-Matrix N mit $n \geqslant 1$ über einem beliebigen Körper zu verstehen, für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $N^k = 0$.

(a) Für jede nilpotente Matrix N ist die Matrix $\mathbb{1}_n + N$ invertierbar.

Beweis:

Nach Annahme existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $N^k = 0$.

Def. $M := \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i$.

$$\begin{aligned} M \cdot (\mathbb{1} + N) &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} N^i \qquad \text{Index } i \text{ verschoben} \\ &= \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i N^i + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} N^i \qquad N^k = 0 \text{ weggelassen} \\ &= \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} (-N^i + N^i) \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

erster Summand in Summe oben

Das zeigt, dass M ein Linksinverses für $\mathbb{1} + N$ ist. Da $\mathbb{1} + N$ eine quadratische Matrix ist, folgt, das M auch ein Rechtsinverses und somit $\mathbb{1} + N$ invertierbar ist (Satz 6.35).

1 $\square$

(b) Jede nilpotente Matrix ist ähnlich zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix (also zu einer oberen Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge Null sind).

Beweis:

Nach Satz 15.16 existiert zu jeder nilpotenten Matrix N eine Jordanbasis B mit zugehöriger JNF

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1, 0)} & & & 0 \\ & \boxed{J(m_2, 0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J(m_k, 0)} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J(m; a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $\hat{N}$ eine strikte obere Dreiecksmatrix und $N = B \hat{N} B^{-1}$, also ist N ähnlich zu $\hat{N}$.

1 $\square$

(c) Jede nilpotente Matrix hat einen nicht-trivialen Kern.

Beweis:

Sei $N \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ nilpotent, $f_N : K^N \longrightarrow K^N$ der assoziierte Endomorphismus. Per Def. $\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{ke}(f_N)$.
Angenommen, $\mathrm{ker} f_N$ ist trivial. Dann folgt aus Kor. 5.19, dass f_N ein Isomorphismus ist, und somit, dass N invertierbar ist. Dann folgt aber aus $N^k = 0$ durch Multiplikation mit N^{-k+1}: $N = 0$.
Also ist $\mathrm{Ker}(N) = K^N$ doch nicht-trivial ↯.
Also ist $\mathrm{Ker}(N)$ nicht-trivial. 1 □

(d) Die Summe zweier nilpotenter Matrizen ist wieder nilpotent.

Gegenbeispiel:

$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es ist $N_1^2 = N_2^2 = 0$, aber $N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar und somit nicht nilpotent. 1

(e) Das Produkt zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

Gegenbeispiel:

N_1, N_2 wie in (d). $M := N_1 \cdot N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht nilpotent, denn $M^2 = M$ und somit $M^k = M \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. 1

3 | **eirtemmyS**

Sei B eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$B^\sharp\colon V \to V^*$$
$$\mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{v}, -)$$

eine wohldefinierte K-lineare Abbildung gegeben ist.

Für jedes $\underline{v} \in V$ ist $B^\#(\underline{v})$ eine Linearform auf V:

Für $\underline{w}, \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in V$, $a \in K$ gilt:

$$B^\#(\underline{v})(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = B(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2)$$
$$= B(\underline{v}, \underline{w}_1) + B(\underline{v}, \underline{w}_2) \quad \text{(Linearität von } B \text{ im 2. Eintrag)}$$
$$= B^\#(\underline{v})(\underline{w}_1) + B^\#(\underline{v})(\underline{w}_2)$$

$$B^\#(\underline{v})(a \cdot \underline{w}) = B(\underline{v}, a \cdot \underline{w})$$
$$= a \cdot B(\underline{v}, \underline{w}) \quad \text{(Linearität von } B \text{ im 2. Eintrag)}$$
$$= a \cdot B^\#(\underline{v})(\underline{w})$$

$B^\#$ ist linear:

Für jedes $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ gilt $B^\#(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = B^\#(\underline{v}_1) + B^\#(\underline{v}_2)$, denn für jedes $\underline{w} \in V$ gilt:

$$\left(B^\#(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)\right)(\underline{w}) = B(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w})$$
$$= B(\underline{v}_1, \underline{w}) + B(\underline{v}_2, \underline{w}) \quad \text{(Linearität von } B \text{ im 1. Eintrag)}$$
$$= B^\#(\underline{v}_1)(\underline{w}) + B^\#(\underline{v}_2)(\underline{w})$$
$$= \left(B^\#(\underline{v}_1) + B^\#(\underline{v}_2)\right)(\underline{w}) \quad \text{(Def. von + auf } V^*\text{)}$$

Für jedes $\underline{v} \in V$, $a \in K$ gilt: $B^\#(a \cdot \underline{v}) = a \cdot B^\#(\underline{v})$, denn für alle $\underline{w} \in V$ gilt:

(Linearität von B im 1. Eintra)

$$\left(B^\#(a \cdot \underline{v})\right)(\underline{w}) = B(a \cdot \underline{v}, \underline{w}) = a \cdot B(\underline{v}, \underline{w})$$
$$= a \cdot \left(B^\#(\underline{v})(\underline{w})\right)$$
$$= \left(a \cdot B^\#(\underline{v})\right)(\underline{w}) \quad \text{(Def. von Skalarmult. auf } V^*\text{)}$$

2,5

(b) Zeigen Sie, dass B genau dann symmetrisch ist, wenn für den Bidualraumhomomorphismus ω_V gilt: $(B^\sharp)^* \circ \omega_V = B^\sharp$.

Für $\underline{v}, \underline{w} \in V$ gilt:

$$\left(\left((B^\#)^* \circ \omega_V\right)(\underline{v})\right)(\underline{w}) = \left(\left(B^\#\right)^*\left(\omega_V(\underline{v})\right)\right)(\underline{w})$$

$$= \left(\omega_V(\underline{v})\right)\left(B^\#(\underline{w})\right) \quad \text{(Def. von ( )}^*\text{)}$$

$$= B^\#(\underline{w})(\underline{v}) \quad \text{(Def. } \omega_V\text{)}$$

$$= B(\underline{w}, \underline{v}).$$

$$\left(B^\#(\underline{v})\right)(\underline{w}) = B(\underline{v}, \underline{w}).$$

Also gilt:

$$(B^\#)^* \circ \omega_V = B^\# \iff B(\underline{w}, \underline{v}) = B(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

$$\iff B \text{ symmetrisch.}$$

2,5

4 | Kern

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraum U und eine lineare Abbildung $i\colon U \to V$ mit folgender universeller Eigenschaft gibt: Es ist $f \circ i = 0$, und für jeden Vektorraum T und jede lineare Abbildung $t\colon T \to V$ mit der Eigenschaft $f \circ t = 0$ existiert genau eine lineare Abbildung $t'\colon T \to U$ mit $i \circ t' = t$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] & V \arrow[r, "f"] & W \\ T \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] & & \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie ferner, dass U durch diese universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt ist.

Existenz: Wähle $U := \ker(f)$,

$i\colon U \longrightarrow V$ kanonische Inklusion.

Dann ist offenbar $f \circ i = 0$, denn $f(\underline{v}) = \underline{0}$ für alle $\underline{v} \in \ker(f)$.

Sei nun $t\colon T \longrightarrow V$ gegeben mit $f \circ t = 0$.

Dann gilt für jedes $\underline{x} \in T$: $t(\underline{x}) \in \ker f$,

denn $f(t(\underline{x})) = (f \circ t)(\underline{x}) = \underline{0}$.

Also können wir t' definieren durch

$$t'\colon T \longrightarrow \ker f, \quad \underline{x} \longmapsto t(\underline{x}).$$

Ist $t''\colon T \longrightarrow \ker f$ eine weitere lineare Abb. mit $i \circ t'' = t$, so gilt für alle $\underline{x} \in T$: $t''(\underline{x}) = t(\underline{x})$. Also ist $t'' = t'$. Also ist t' eindeutig.

2,5

Eindeutigkeit: Sei (U, i) und $(\tilde{U}, \tilde{i})$ mit obiger UE gegeben. Da $f \circ \tilde{i} = 0$ ist, liefert uns die UE von (U, i) eine lineare Abbildung $\tilde{i}'$ mit

(a) $\boxed{i \circ \tilde{i}' = \tilde{i}.}$ Analog erhalten wir aus der UE von $(\tilde{U}, \tilde{i})$ eine lineare Abbildung i' mit

(b) $\boxed{\tilde{i} \circ i' = i.}$

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[d, shift right, "i'"'] \arrow[dr, "i"] & & \\
\tilde{U} \arrow[u, shift right, "\tilde{i}'"'] \arrow[r, "\tilde{i}"'] & V \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}
$$

Betrachte $i' \circ \tilde{i}'$ und $\mathrm{id}_{\tilde{U}}$:

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{U} \arrow[r, "\tilde{i}"] & V \arrow[r, "f"] & W \\
\tilde{U} \arrow[u, shift left, "\mathrm{id}_{\tilde{U}}"'] \arrow[u, shift right, "i' \circ \tilde{i}'"] \arrow[ur, "\tilde{i}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Es ist sowohl $\tilde{i} \circ \mathrm{id}_{\tilde{U}} = \tilde{i}$

als auch $\tilde{i} \circ (i' \circ \tilde{i}') = (\tilde{i} \circ i') \circ \tilde{i}'$

$\overset{(b)}{=} i \circ \tilde{i}'$

$\overset{(a)}{=} \tilde{i}$

Also folgt aus der Eindeutigkeit in der UE von $(\tilde{U}, \tilde{i})$: $i' \circ \tilde{i}' = \mathrm{id}_{\tilde{U}}$

Analog folgt aus der Eindeutigkeit in der UE von (U, i): $\tilde{i}' \circ i' = \mathrm{id}_U$

Also sind i' und $\tilde{i}'$ zueinander inverse Isomorphismen. Also sind U und $\tilde{U}$ isomorph.

Aus der Eindeutigkeit in der UE von U folgt ferner, dass $\tilde{i}'$ der einzige Isomorphismus ist, für den

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "i"] & & \\
\tilde{U} \arrow[u, "\tilde{i}'"] \arrow[r, "\tilde{i}"'] & V \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}
$$

kommutiert.

2,5