Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
23.06.2022

Lineare Algebra II
Blatt 11

---

1 | Nachtrag

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n \times m)$ und $f_A, f_B \colon K^m \to K^n$ die assozierten linearen Abbildungen. Zeigen Sie, dass f_A und f_B dasselbe Bild haben, falls B aus A durch elementare Spaltenoperationen hervorgeht.

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$ identisch sind:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

2 | Nullsumme

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Unter einer nilpotenten Matrix ist jeweils eine $(n \times n)$-Matrix N mit $n \geqslant 1$ über einem beliebigen Körper zu verstehen, für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $N^k = 0$.

(a) Für jede nilpotente Matrix N ist die Matrix $\mathbb{1}_n + N$ invertierbar.

(b) Jede nilpotente Matrix ist ähnlich zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix (also zu einer oberen Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge Null sind).

(c) Jede nilpotente Matrix hat einen nicht-trivialen Kern.

(d) Die Summe zweier nilpotenter Matrizen ist wieder nilpotent.

(e) Das Produkt zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

3 | eirtemmyS

Sei B eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} B^\sharp \colon V &\to V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto B(\mathbf{v}, -) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte K-lineare Abbildung gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass B genau dann symmetrisch ist, wenn für den Bidualraumhomomorphismus ω_V gilt: $(B^\sharp)^* \circ \omega_V = B^\sharp$.

4 | Kern

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraum U und eine lineare Abbildung $i\colon U \to V$ mit folgender universeller Eigenschaft gibt: Es ist $f \circ i = 0$, und für jeden Vektorraum T und jede lineare Abbildung $t\colon T \to V$ mit der Eigenschaft $f \circ t = 0$ existiert genau eine lineare Abbildung $t'\colon T \to U$ mit $i \circ t' = t$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] & V \arrow[r, "f"] & W \\ T \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] & & \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie ferner, dass U durch diese universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt ist.