1 | Alter Wein

Gegeben sei der Untervektorraum

$$W = \left\langle \overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\\2\end{pmatrix}}^{\underline{w}_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}}^{\underline{w}_2}, \overbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\2\\5\\4\end{pmatrix}}^{\underline{w}_3} \right\rangle \subset \mathbb{R}^5.$$

Bestimmen Sie eine Basis von W^0, dem Annullator von W.

Detaillierte Vorüberlegung:

$$W^0 = \{ \varphi \in (\mathbb{R}^5)^* \mid \varphi(\underline{w}) = 0 \ \forall \ \underline{w} \in W \}$$

$$= \{ \varphi \in (\mathbb{R}^5)^* \mid \varphi(\underline{w}_1) = 0 \text{ und } \varphi(\underline{w}_2) = 0 \text{ und } \varphi(\underline{w}_3) = 0 \}$$

$$= \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \in (\mathbb{R}^5)^* \;\middle|\; (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\\2\end{pmatrix} = 0 \text{ und } (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} = 0 \text{ und } (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\2\\5\\4\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \in (\mathbb{R}^5)^* \;\middle|\; (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 2 & 0\\1 & 1 & 2\\3 & -2 & 5\\2 & 1 & 4\end{pmatrix} = (0,0,0) \right\}$$

Transponieren

$$= \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \in (\mathbb{R}^5)^* \;\middle|\; \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 2\\0 & 2 & 1 & -2 & 1\\3 & 0 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\\\varphi_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_5) \in (\mathbb{R}^5)^* \;\middle|\; \varphi^T \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 2\\0 & 2 & 1 & -2 & 1\\3 & 0 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}\right) \right\}$$

2

Bestimmung des Lösungsraums $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\0&2&1&-2&1\\3&0&2&1&4\end{pmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\0&2&1&-2&1\\3&0&2&5&4\end{pmatrix}\ -\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&5&1\\0&2&1&-2&1\\3&0&2&5&4\end{pmatrix}\ -3\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&5&1\\0&2&1&-2&1\\0&0&2&-10&1\end{pmatrix}\ \begin{matrix}\\ \cdot\frac{1}{2}\\ \cdot\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&5&1\\0&1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-5&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ -\tfrac{1}{2}\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&5&1\\0&1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&1&-5&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Wende nun z.B. Algorithmus aus Lin A I an:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-1\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&+5&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\mathcal{L}(\ldots)$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix}-5\\-\frac{3}{2}\\+5\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Hieraus und aus der Vorüberlegung folgt:

W° hat Basis $\left((-5\ \ -\tfrac{3}{2}\ \ 5\ \ 1\ \ 0), (-1\ \ -\tfrac{1}{4}\ \ -\tfrac{1}{2}\ \ 0\ \ 1)\right)$.

3

2 | Tic-Tac-Toe

Zeigen Sie, dass für beliebige Untervektorräume W_1, W_2 eines Vektorraums V gilt:

(a) $\{\mathbf{0}\}^0 = V^*$

$$\{\underline{0}\}^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\underline{0}) = 0\} = V^*$$

denn $\varphi(\underline{0}) = 0$ für jedes φ in V^*, weil jedes φ per Definition linear ist.

entscheidende Beobachtung

1

(b) $V^0 = \{\mathbf{0}\}$

$$V^0 = \{\varphi \in V^* \mid \underbrace{\varphi_{|V}}_{\varphi} = 0\} = \{\text{Nullabbildung}\}$$

1

(c) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

($\subseteq$) Sei $\varphi \in (W_1 + W_2)^0$.

Dann gilt für jedes $\underline{w}_1 \in W_1$: $\varphi(\underline{w}_1) = 0$
(denn $\underline{w}_1 \in W_1 + W_2$). Also ist $\varphi \in W_1^0$.
Analog folgt: $\varphi \in W_2^0$.
Also ist $\varphi \in W_1^0 \cap W_2^0$.

1

($\supseteq$) Sei $\varphi \in W_1^0 \cap W_2^0$.

Sei $\underline{w} \in W_1 + W_2$ beliebig. Wir können $\underline{w}$ schreiben als $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ mit $\underline{w}_1 \in W_1$ und $\underline{w}_2 \in W_2$ (Notiz 4.11).
Also ist

$$\varphi(\underline{w}) = \varphi(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \varphi(\underline{w}_1) + \varphi(\underline{w}_2) = \underbrace{\underline{0}}_{\varphi \in W_1^0} + \underbrace{\underline{0}}_{\varphi \in W_2^0} = \underline{0}.$$

Demnach ist $\varphi \in (W_1 + W_2)^0$.

1

(d) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

($\supseteq$) Sei $\varphi \in W_1^0 + W_2^0$. Dann können wir φ schreiben als $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\varphi_1 \in W_1^0$ und $\varphi_2 \in W_2^0$.

Sei nun $\underline{w} \in W_1 \cap W_2$. Dann ist

$$\varphi(\underline{w}) = (\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{w}) \overset{\text{Def. von + auf } V^*}{=} \varphi_1(\underline{w}) + \varphi_2(\underline{w}) = \underbrace{\underline{0}}_{\substack{\underline{w} \in W_1 \\ \text{und } \varphi_1 \in W_1^\circ}} + \underbrace{\underline{0}}_{\substack{\underline{w} \in W_2 \\ \text{und } \varphi_2 \in W_2^\circ}} = \underline{0}$$

Also ist $\varphi \in (W_1 \cap W_2)^\circ$. 1

(volle Punktzahl bis hier)

($\subseteq$) Sei $\varphi \in (W_1 \cap W_2)^\circ$.

Wähle Zerlegung von V wie folgt

$$V = \underbrace{\overbrace{W_1' \oplus W_1 \cap W_2}^{W_1} \oplus W_2'}_{W_1 + W_2} \oplus V'$$

(wobei $W_1 \cap W_2 \oplus W_2' = W_2$)

(Wähle Komplemente W_1' von $W_1 \cap W_2$ in W_1,
W_2' von $W_1 \cap W_2$ in W_2;
Prüfe, dass dann gilt: $W_1' \oplus W_1 \cap W_2 \oplus W_2' = W_1 + W_2$.
Wähle schließlich Komplement V' von $W_1 + W_2$ in V!)

Schreibe im Folgenden alle Vektoren aus V als Tupel $(\underline{w}_1', \underline{w}, \underline{w}_2', \underline{v}')$ mit $\underline{w}_i' \in W_i'$, $\underline{w} \in W_1 \cap W_2$, $\underline{v}' \in V'$.

Per Annahme gilt:

$$\varphi(\underline{0}, \underline{w}, \underline{0}, \underline{0}) = 0 \quad \forall\, \underline{w} \in W_1 \cap W_2, \text{ also}$$

$$(*) \quad \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}, \underline{w}_2', \underline{v}') = \varphi(\underline{w}_1', \underline{0}, \underline{w}_2', \underline{v}') \quad \forall\, (\dots) \in V.$$

Definiere $\varphi_1 : V \longrightarrow K$
durch $(\underline{w}_1', \underline{w}, \underline{w}_2', \underline{v}') \mapsto \varphi(\underline{0}, \underline{0}, \underline{w}_2', \underline{v}')$.
und $\varphi_2 : V \longrightarrow K$
durch $(\underline{w}_1', \underline{w}, \underline{w}_2', \underline{v}') \mapsto \varphi(\underline{w}_1', \underline{0}, \underline{0}, \underline{0})$.

Dann ist $\varphi_1 \in W_1^\circ$, $\varphi_2 \in W_2^\circ$, und wegen $(*)$
gilt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
Also ist $\varphi \in W_1^\circ + W_2^\circ$. 3 Bonuspunkte

Alternative für (d) falls V endlich-dim.:

Idee: „$W^{\circ\circ} = W$". Wenden wir (c) auf W_1° und W_2° an, erhalten wir daher

$$(W_1^\circ \cap W_2^\circ)^\circ = \underbrace{W_1^{\circ\circ} + W_2^{\circ\circ}}_{= W_1 + W_2},$$

und indem wir noch einmal zum Annulator übergehen, folgt

$$\underbrace{(W_1^\circ \cap W_2^\circ)^{\circ\circ}}_{= W_1^\circ \cap W_2^\circ} = (W_1 + W_2)^\circ. \quad \text{(d)}$$

Ist V endlich-dim., so kann man aus dieser Idee einen Beweis basteln:

Lemma 1: Ist W UVR eines endlich-dim. VRs V, so lässt sich der Bidualraumisomorphismus ω_V einschränken zu einem Isomorphismus

$$\omega_V|_W^{:} \; W \xrightarrow{\cong} (W^\circ)^\circ$$

Beweis:

- $\omega_V(W) \subseteq (W^\circ)^\circ$:

  Sei $\underline{w} \in W$, $\varphi \in W^\circ$. Dann ist
  $$(\omega_V(\underline{w}))(\varphi) \overset{\text{Def. } \omega_V}{=} \varphi(\underline{w}) \underset{\varphi \in W^\circ}{=} 0.$$
  Also ist $\omega_V(\underline{v}) \in (W^\circ)^\circ$.

- $\omega_V|_W$ ist injektiv, denn ω_V ist injektiv (Satz 16.18).
- $\dim((W^\circ)^\circ) = \dim W$:
  $$\begin{aligned}\dim((W^\circ)^\circ) &= \dim V^* - \dim W^\circ \\ &\overset{\text{Kor. 16.14}}{=} \dim V^* - (\dim V - \dim W) \\ &\overset{\text{Kor. 16.5}}{=} \dim W.\end{aligned}$$

Nutze nun Korollar 5.19. $\square$

Lemma 2: Ist W UVR eines endlich-dim. VRs V, so ist
$$(\omega_V(W))^\circ = \omega_{V^*}(W^\circ).$$

Beweis:

Die beiden angegebenen UVR von V^{***} haben dieselbe Dimension [...]. Also reicht es, eine Inklusion zu zeigen. Wir zeigen $(\supseteq)$:

Sei $\psi \in \omega_{V^*}(W^\circ)$, also $\psi = \omega_{V^*}(\varphi)$ für ein $\varphi \in W^\circ$.

Sei $\alpha \in \omega_V(W)$, also $\alpha = \omega_V(\underline{w})$ für ein $\underline{w} \in W$.

Dann ist
$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= (\omega_{V^*}(\varphi))(\omega_V(\underline{w})) \\ &= (\omega_V(\underline{w}))(\varphi) && \text{(Def. von } \omega_{V^*}) \\ &= \varphi(\underline{w}) && \text{(Def. von } \omega_V) \\ &= 0 \end{aligned}$$
$\square$

Mit Hilfe dieser Lemmata folgt (a) für endlich-dim. V aus (c):

Laut (c) ist
$$\begin{aligned}(W_1^\circ + W_2^\circ)^\circ &= W_1^{\circ\circ} \cap W_2^{\circ\circ}, \\ &\overset{\text{Lemma 1}}{=} \omega_V(W_1) \cap \omega_V(W_2) \\ &\overset{\omega_V \text{ Iso}}{=} \omega_V(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

Wende hierauf $(\,)^\circ$ an:
$$\underbrace{(W_1^\circ + W_2^\circ)^{\circ\circ}}_{\overset{\text{Lemma 1}}{=} \omega_{V^*}(W_1^\circ + W_2^\circ)} = \underbrace{(\omega_V(W_1 \cap W_2))^\circ}_{\overset{\text{Lemma 2}}{=} \omega_{V^*}(W_1 \cap W_2)}.$$

Es folgt
$$W_1^\circ + W_2^\circ = W_1 \cap W_2.$$

2,5 Bonuspunkte

3 | Determinantenexpress

Zeigen Sie, dass für jede komplexe $n \times n$-Matrix A gilt: $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$.

Jede quadratische komplexe Matrix besitzt eine JNF (denn über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren). Wähle also Jordanbasis J mit zugehöriger JNF $\hat{A}$, sodass gilt:

$$A = J \hat{A} J^{-1},$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} + \hat{N}$$ für eine strikte obere Dreiecksmatrix $\hat{N}$.

Rechne nun beide Seiten explizit aus.

Linke Seite:

1. $\exp(\hat{A}) = \exp \hat{D} \cdot \exp \hat{N}$ (da obige Zerlegung eine JC-Zerlegung ist)

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left(\mathbb{1} + \hat{N} + \tfrac{1}{2}\hat{N}^2 + \tfrac{1}{3!}\hat{N}^3 + \dots\right)}$$

$\|$ obere Dreiecksmatrix mit 1en auf Diagonale

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$ ← obere Dreiecksmatrix mit Einträgen e^{a_i} auf Diagonale

2. $\det(\exp(\hat{A})) \overset{(1.)}{=} e^{a_1} \cdot \ldots \cdot e^{a_n}$

$$= e^{a_1 + \dots + a_n}$$

3. $\det(\exp(A)) = \det(\exp(J\hat{A}J^{-1}))$

$$= \det(J \cdot \exp(\hat{A}) \cdot J^{-1})$$

$$= \det J \cdot \det(\exp \hat{A}) \cdot \det(J^{-1})$$

$$= \det(\exp \hat{A})$$

$$\overset{(2.)}{=} \underline{\underline{e^{a_1 + \dots + a_n}}}$$

Rechte Seite:

$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

1. $tr(A) = tr(J\hat{A}J^{-1}) = tr(JJ^{-1}\hat{A})$

$$= tr(\hat{A})$$

$$= tr\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$= a_1 + \dots + a_n$$

2. $e^{tr(A)} \overset{(1.)}{=} \underline{\underline{e^{a_1 + \dots + a_n}}}$

5

4 | Doppelpendel

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, V^* sein Dualraum und V^{**} sein Bidualraum, also der Dualraum des Dualraums. Zu einer Basis B von V erhalten wir eine duale Basis B^* von V^* und einen Isomorphismus

$$\iota_B \colon V \to V^*,$$

der die Elemente von B auf die entsprechenden Elemente von B^* abbildet. Genauso erhalten wir einen Isomorphismus

$$\iota_{B^*} \colon V^* \to V^{**},$$

der die Elemente von B^* auf die entsprechenden Elemente von B^{**} abbildet.

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und zwei verschiedene Basen B und C von V derart, dass sich die Isomorphismen ι_B und ι_C unterscheiden.

Wähle $V = \mathbb{R}^2$, $B := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ und $C := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Dann ist $V^* = (\mathbb{R}^2)^*$, $B^* = \left((1\ 0), (0\ 1)\right)$ und $C^* = \left((1\ -1), (0\ 1)\right)$

– siehe Beispiele nach Satz 16.3.

Hier ist $\iota_B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ 0)$,

aber $\iota_C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ -1) \neq (1\ 0)$.

Also ist $\iota_B \neq \iota_C$.

1,5

Noch einfachere Alternative:

Wähle $V := \mathbb{R}$, $B := ((1))$, $C := ((2))$. Dann ist

$B^* = ((1))$, $C^* = \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)$ (denn $\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot (2) = 1$).

Somit ist $\iota_B((1)) = ((1))$,

aber $\iota_C((1)) \underset{\iota_C \text{ linear}}{=} \tfrac{1}{2} \cdot \iota_C((2)) \underset{\text{Def. } \iota_C}{=} \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{4}\right) \neq (1)$

Also ist $\iota_B \neq \iota_C$

1,5

(b) Zeigen Sie, dass die Komposition $\iota_{B*} \circ \iota_B \colon V \to V^{**}$ unabhängig von der Wahl der Basis B ist.

Sei $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$,

$B^* = (\underline{b}_1^*, \dots, \underline{b}_n^*)$,

$B^{**} = (\underline{b}_1^{**}, \dots, \underline{b}_n^{**})$.

Es reicht, zu zeigen: $\iota_{B^*} \circ \iota_B = \omega_V$, denn ω_V ist von der Wahl von B unabhängig. Dazu genügt es, zu zeigen:

$$(\iota_{B^*} \circ \iota_B)(\underline{b}_i) = \omega_V(\underline{b}_i) \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dazu wiederum reicht es, zu zeigen:

$$\big((\iota_{B^*} \circ \iota_B)(\underline{b}_i)\big)(\underline{b}_j^*) = (\omega_V(\underline{b}_i))(\underline{b}_j^*) \qquad \forall\, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Tatsächlich gilt:

$$\big((\iota_{B^*} \circ \iota_B)(\underline{b}_i)\big)(\underline{b}_j^*) = (\iota_{B^*}(\underline{b}_i^*))(\underline{b}_j^*) \qquad (\text{denn } \iota_B(\underline{b}_i) = \underline{b}_i^*)$$

$$= \underline{b}_i^{**}(\underline{b}_j^*) \qquad (\text{denn } \iota_{B^*}(\underline{b}_i^*) = \underline{b}_i^{**})$$

$$= \delta_{ij} \qquad (\text{nach Def. von } \underline{b}_i^{**} = (\underline{b}_i^*)^*)$$

$$(\omega_V(\underline{b}_i))(\underline{b}_j^*) \underset{\text{Def. } \omega_V}{=} \underline{b}_j^*(\underline{b}_i) \underset{\text{Def. } \underline{b}_j^*}{=} \delta_{ji}$$

Da $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, folgt also die Behauptung.

3,5