Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
16.06.22

Lineare Algebra II
Blatt 10

---

1 | Alter Wein

Gegeben sei der Untervektorraum

$$W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^5.$$

Bestimmen Sie eine Basis von W^0, dem Annullator von W.

2 | Tic-Tac-Toe

Zeigen Sie, dass für beliebige Untervektorräume W_1, W_2 eines Vektorraums V gilt:

(a) $\{\mathbf{0}\}^0 = V^*$

(b) $V^0 = \{\mathbf{0}\}$

(c) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

(d) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

3 | Determinantenexpress

Zeigen Sie, dass für jede komplexe $n \times n$-Matrix A gilt: $\det(\exp A) = e^{\mathrm{tr} A}$.

4 | Doppelpendel

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, V^* sein Dualraum und V^{**} sein Bidualraum, also der Dualraum des Dualraums. Zu einer Basis B von V erhalten wir eine duale Basis B^* von V^* und einen Isomorphismus

$$\iota_B \colon V \to V^*,$$

der die Elemente von B auf die entsprechenden Elemente von B^* abbildet. Genauso erhalten wir einen Isomorphismus

$$\iota_{B^*} \colon V^* \to V^{**},$$

der die Elemente von B^* auf die entsprechenden Elemente von B^{**} abbildet.

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und zwei verschiedene Basen B und C von V derart, dass sich die Isomorphismen ι_B und ι_C unterscheiden.

(b) Zeigen Sie, dass die Komposition $\iota_{B^*} \circ \iota_B \colon V \to V^{**}$ unabhängig von der Wahl der Basis B ist.

Abgabefrist: 27.06.22, 10:15 Uhr.