1 | **Kleine Fische fängt man**

Betrachten Sie noch einmal die Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 1 auf Blatt 6:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu jedem dieser Endomorphismen eine Jordannormalform, sofern eine existiert.

Blatt 6:

$\chi_A = -(x-1)^2(x-2)$

$\mu_A = (x-1)(x-2)$

$\chi_B = -(x-1)^2(x-2)$

$\mu_B = (x-1)^2(x-2)$

$\chi_C = -(x-1)(x-2)(x-3),$

$\mu_C = (x-1)(x-2)(x-3)$

$\chi_D = (x-4)(x-8)$

$\mu_D = (x-4)(x-8)$

$\chi_E = x^2+1$ – irreduzibel über $\mathbb{R}$, also existiert keine JNF.

JNF:

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 1

$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 1

$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 1

$\hat{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ 1

1

2 | Butter bei die Fische

Bestimmen Sie zu den durch B, C und D in Aufgabe 1 definierten Endomorphismen jeweils eine Jordanbasis, also eine Basis, in der der angegebene Endomorphismus Jordannormalform hat.

Wir folgen jeweils Rezept 15.17.

> 15.17 Rezept: Jordanbasis finden f GV
>
> SCHRITT 1:
> Bestimme χ_f und zerlege χ_f in Linearfaktoren:
> $$\chi_f = \pm \prod_i (X-a_i)^{r_i}$$
> (Falls χ_f nicht in LF zerfällt, existiert keine Jordanbasis.)
>
> SCHRITT 2:
> Bestimme $\mu_f = \prod_i (X-a_i)^{m_i}$
> ($1 \le m_i \le r_i$ nach Cayley-Hamilton (14.7) und Satz 14.16.)
>
> SCHRITT 3:
> Berechne für jeden EW a_i mit $g_i := f - a_i \cdot \mathrm{id}$
> - Hauptraum $\mathrm{Hau}(f; a_i) = \ker(g_i^{m_i})$, und
> - Unterräume $\ker(g_i^{j})$ für $j < m_i$
>
> SCHRITT 4:
> Bestimme mit dem Verfahren aus dem Beweis zu Satz 15.16 Jordanbasis zu jedem g_i und setze diese zu Jordanbasis von f zusammen.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SCHRITT 1 & 2:

$$\chi_B = -(X-1)^2(X-2)$$
$$\mu_B = (X-1)^2(X-2) \qquad \text{(s.o.)}$$

SCHRITT 3:

$$\mathrm{Hau}(B;1) = \ker((B-\mathbb{1}_3)^2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rotatebox{90}{$\subseteq$} \qquad\qquad = \dots \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\ker(B - \mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \dots \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\mathrm{Hau}(B;2) = \ker(B - 2\cdot\mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \dots \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— bis hier: 1 Punkt

SCHRITT 4:

Jordanbasis von $\mathrm{Hau}(B;1)$:

Wähle U_2 mit $\ker((B-\mathbb{1})^2) = \ker(B-\mathbb{1}) \oplus U_2$

Hier $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ möglich (oder auch $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$).

Begründung: $\ker((B-\mathbb{1})^2)$ hat laut obiger Rechnung

$$\text{Basis } \mathcal{B} := \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_2} \Big).$$

Nach Austauschlemma ist auch

$$\mathcal{B}' := \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2'} \right)$$

eine Basis, denn $b_2' = 1 \cdot b_1 + \underset{\neq 0}{1} \cdot b_2$.

Also ist

$$\ker\left((B - \mathbb{1})^2\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \ker(B - \mathbb{1}).$$

Also hat $\mathrm{Hau}(B;1)$ Jordanbasis

$$\left((B - \mathbb{1}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

— bis hier: 2 Punkte

Jordanbasis von $\mathrm{Hau}(B;2)$:

$$\mathrm{Hau}(B;2) = \mathrm{Eig}(B;2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{(s.o.)}$$

Also ist eine Jordanbasis für B gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

3

(Probe: $B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hier ist jeweils $\mathrm{Hau}(C;a) = \mathrm{Eig}(C;a)$ $(a \in \{1,2,3\})$.

$$\mathrm{Eig}(C;1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\dots}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(C;2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\dots}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(C;3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\dots}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Also ist eine Jordanbasis für C gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Wieder ist jeweils $\mathrm{Hau}(D;a) = \mathrm{Eig}(D;a)$ $(a \in \{4,8\})$.

$$\mathrm{Eig}(D;4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(D;8) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Also ist eine Jordanbasis für D gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

1

3 | Salt & Vinegar

Bestimmen Sie eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis für den durch die folgende Matrix definierten Endomorphismus von $\mathbb{R}^6$:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SCHRITT 1: $\chi_G = (2-X)^6 = \underline{\underline{(X-2)^6}}$ 0,5

SCHRITT 2: $\mu_G = (X-2)^i$ für ein $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$G - 2\cdot\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(G - 2\cdot\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(G - 2\cdot\mathbb{1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Also ist $\mu_G = \underline{\underline{(X-2)^3}}$ 0,5

SCHRITT 3:

$$\mathrm{Hau}(G;3) = \ker(G-2\cdot\mathbb{1})^3 = \ker(0) = \mathbb{R}^6$$

$$\cup\!\!\shortmid$$

$$\ker(G-2\cdot\mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_6 \rangle$$ 0,5

$$\cup\!\!\shortmid$$

$$\ker(G-2\cdot\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\dots}{=} \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_4 \rangle$$ 1

SCHRITT 4:

Wähle Komplement U_3 von $\ker(G-2\cdot\mathbb{1})^2$ in $\ker(G-2\cdot\mathbb{1})^3$, sodass also gilt:

$$\ker(G-2\cdot\mathbb{1})^3 = \ker(G-2\cdot\mathbb{1})^2 \oplus U_3 ,$$

also

$$\mathbb{R}^6 = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_6 \rangle \oplus U_3 .$$

Offenbar ist $U_3 = \langle \underline{e}_5 \rangle$ eine Möglichkeit. 0,5

Wähle Komplement U_2 von $\ker(G-2\cdot\mathbb{1}) \oplus (G-2\cdot\mathbb{1})(U_3)$ in $\ker(G-2\cdot\mathbb{1})^2$, sodass also gilt:

$$\ker(G-2\cdot\mathbb{1})^2 = \ker(G-2\cdot\mathbb{1}) \oplus \left\{ \begin{array}{c} (G-2\cdot\mathbb{1})(U_3) \\ \oplus \\ U_2 \end{array} \right. ,$$

also

$$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_6 \rangle = \underbrace{\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_4 \rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \oplus U_2 .$$

$$= \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle \oplus U_2$$

Eine Möglichkeit: $U_2 = \langle \underline{e}_6 \rangle$. 0,5

Wähle Komplement U_1 von $(G-2\cdot\mathbb{1})(U_2) \oplus (G-2\cdot\mathbb{1})^2(U_3)$ in $\ker(G-2\cdot\mathbb{1})$, sodass also gilt:

$$\ker(G-2\cdot\mathbb{1}) = \left\{ \begin{array}{c} (G-2\cdot\mathbb{1})^2(U_3) \\ \oplus \\ (G-2\cdot\mathbb{1})(U_2) \\ \oplus \\ U_1 \end{array} \right. ,$$

also

$$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_4 \rangle = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \oplus U_1$$

$$= \langle \underline{e}_1, \underline{e}_4 \rangle \oplus U_1$$

Offenbar ist $U_1 := \langle \underline{e}_2 \rangle$ eine Möglichkeit 0,5

Insgesamt ergibt sich:

$$\mathbb{R}^6 = \left\{ \begin{array}{ccccc} (G-2\cdot\mathbb{1})^2(U_3) & \oplus & (G-2\cdot\mathbb{1})(U_3) & \oplus & U_3 \\ \oplus & & \oplus & & \\ (G-2\cdot\mathbb{1})(U_2) & \oplus & U_2 & & \\ \oplus & & & & \\ U_1 & & & & \end{array} \right.$$

mit

$$U_3 = \langle \underline{e}_5 \rangle,$$
$$(G-2\cdot\mathbb{1})(\underline{e}_5) = \underline{e}_1 + \underline{e}_3,$$
$$(G-2\cdot\mathbb{1})^2(\underline{e}_5) = \underline{e}_1,$$
$$U_2 = \langle \underline{e}_6 \rangle,$$
$$(G-2\cdot\mathbb{1})(\underline{e}_6) = 3\underline{e}_4$$
$$U_1 = \underline{e}_2$$

Also ist eine Jordanbasis für G gegeben durch

$$(\underbrace{\underline{e}_1}_{\underline{b}_1}, \underbrace{\underline{e}_1+\underline{e}_3}_{\underline{b}_2}, \underbrace{\underline{e}_5}_{\underline{b}_3}, \underbrace{3\underline{e}_4}_{\underline{b}_4}, \underbrace{\underline{e}_6}_{\underline{b}_5}, \underbrace{\underline{e}_2}_{\underline{b}_6}).$$

0,5

Außerdem 0,5 für „insgesamt richtige Strategie".

(Probe:

$$G\cdot\underline{b}_1 = 2\underline{e}_1 = 2\cdot\underline{b}_1$$
$$G\cdot\underline{b}_2 = 3\underline{e}_1+2\underline{e}_3 = 1\cdot\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2$$
$$G\cdot\underline{b}_3 = \underline{e}_1+\underline{e}_3+2\underline{e}_5 = 1\cdot\underline{b}_2 + 2\cdot\underline{b}_3$$
$$G\cdot\underline{b}_4 = 6\cdot\underline{e}_4 = 2\cdot\underline{b}_4$$
$$G\cdot\underline{b}_5 = 3\cdot\underline{e}_4+2\underline{e}_6 = 1\cdot\underline{b}_4 + 2\cdot\underline{b}_5$$
$$G\cdot\underline{e}_6 = 2\cdot\underline{e}_2 = 2\cdot\underline{e}_6$$

)

4 | **Tripotent**

Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraums, der $f^3 = f$ erfüllt, diagonalisierbar ist.

Nach Annahme gilt für $g := X^3 - X \in K[X]$:

$$g(f) = 0.$$

Daher $\mu_f \mid X^3 - X = X \cdot (X^2 - 1)$

$$= X \cdot (X-1) \cdot (X+1).$$

Also zerfällt μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren, und f erfüllt das „Dritte Diagonalisierungs-Kriterium 14.19.

5

5 | **Gleichgesinnt**

Seien f und g Endomorphismen von $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$), wobei g sogar ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{C}^n$ und einen Skalar $a \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(\mathbf{v}) = ag(\mathbf{v})$.

Das charakteristische Polynom $\chi_{g^{-1} \circ f}$ besitzt wie jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ eine Nullstelle $a \in \mathbb{C}$. Diese Nullstelle ist ein EW von $g^{-1} \circ f$. Also existiert ein EV $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ mit $g^{-1} \circ f(\underline{v}) = a \cdot \underline{v}$. Anwendung von g liefert:

$$f(\underline{v}) = g(a \cdot \underline{v}) \overset{g \text{ linear}}{=} a \cdot g(\underline{v})$$

5

6 | Inkompatibel

Geben Sie zwei diagonalisierbare Endomorphismen f und g eines Vektorraums V an, die sich nicht simultan diagonalisieren lassen (also derart, dass keine Basis von V existiert, in der sowohl f als auch g Diagonalgestalt haben.)

$V = \mathbb{R}^2$ hat Basen $\mathcal{E} := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$

und $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$

Definiere Endomorphismen mit Satz 7.1:

$f \circlearrowright \mathbb{R}^2$ durch $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (also ${}_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$)

$g \circlearrowright \mathbb{R}^2$ durch $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (also ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$)

Nach Konstruktion sind f und g diagonalisierbar.
Jede Basis C, in der f Diagonalgestalt hat, muss einen EV $\underline{v}_+ \in \mathrm{Eig}(f; +1)$, also $\underline{v}_+ = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, und einen EV $\underline{v}_- \in \mathrm{Eig}(f; -1)$, also $\underline{v}_- = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$, enthalten; $x, y \neq 0$.
Hat außerdem auch g bezüglich der Basis C Diagonalgestalt, so muss gelten:

$\begin{cases} \underline{v}_+ \in \mathrm{Eig}(g; +1) \\ \text{und } \underline{v}_- \in \mathrm{Eig}(g; -1) \end{cases}$ oder $\begin{cases} \underline{v}_- \in \mathrm{Eig}(g; +1) \\ \text{und } \underline{v}_+ \in \mathrm{Eig}(g; -1) \end{cases}$

unmöglich, denn $\underline{v}_- \notin \mathrm{Eig}(g; -1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

unmöglich, denn $\underline{v}_- = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \notin \mathrm{Eig}(g; +1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Also existiert keine Basis C, in der f und g Diagonalgestalt haben.

5