1 | Minimalpolyphon

Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Minimalpolynome der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\chi_A &= (4-x)(-3-x)(3-x) - 24 - 24 \\
&\qquad - \big(6\cdot(-3-x) - 8(4-x) - 12(3-x)\big) \\
&= (4-x)(-9+x^2) - 48 \\
&\qquad - (-18 - 6x - 32 + 8x - 36 + 12x) \\
&= \cancel{-36} + 4x^2 + 9x - x^3 - 48 \\
&\qquad + 18 + 6x + 32 - 8x + \cancel{36} - 12x \\
&= -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \qquad 0{,}5
\end{aligned}$$

Offenbar $\chi_A(1) = 0$. Polynomdivision liefert:

$$\begin{aligned}
\chi_A &= (x-1)(-x^2+3x-2) \\
&= (x-1)\big(-(x-1)(x-2)\big) \\
&= -(x-1)^2(x-2) \qquad 0{,}5
\end{aligned}$$

Nach Satz 14.16 folgt:

$$\mu_A = \begin{cases} (x-1)(x-2) \\ (x-1)^2(x-2) \end{cases}$$

$$\big((x-1)(x-2)\big)(A) = (A-\mathbb{1})(A-2\cdot\mathbb{1})$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\mu_A = (x-1)(x-2)$ $\qquad 0{,}5$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\chi_B = \dots = \chi_A$, 1 also wieder

$$\mu_B = \begin{cases} (x-1)(x-2) \\ (x-1)^2(x-2) \end{cases}$$

$$((x-1)(x-2))(B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \cdots \\ & \cdots \\ & \cdots \end{pmatrix} \neq 0,$$

also $\mu_B = (x-1)^2(x-2)$ 0,5

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\chi_C = -(x-1)(x-2)(x-3)$, also

$\mu_C = (x-1)(x-2)(x-3)$ nach Satz 14.16.

0,5

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_D &= (5-x)(7-x) - 3 \\ &= x^2 - 12x + 32 \quad 0{,}5 \\ &= (x-4)(x-8), \text{ also} \\ \mu_D &= (x-4)(x-8) \quad 0{,}5 \text{ nach Satz 14.16.} \end{aligned}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_E &= (1-x)(-1-x) + 2 \\ &= x^2 + 1, \text{ irreduzibel über } \mathbb{R}, \text{ also} \\ \mu_E &= x^2 + 1. \quad 0{,}5 \end{aligned}$$

2 | Zerlegung

Untersuchen Sie, ob in den folgenden Beispielen der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ in eine direkte Summe der angegebenen Unterräume zerfällt, ob also gilt $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ bzw. $\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W$ *(siehe auch Blatt 2, Aufgabe 5)*.

(a) $U := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_2 = a_3\}$
$V := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + 2a_2 + a_3 = 0, a_1 = a_3\}$

$U = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, also

$\dim U = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$

$V = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, also

$\dim V = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$.

Somit $\dim(U+V) \leq 2 < \dim \mathbb{R}^3$,
also $\mathbb{R}^3 \neq U \oplus V$.

1,5

(b) $U := \{(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_3 = 0, a_2 + a_4 = 0\}$
$V := \{(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_2 = 0, a_1 + a_4 = 0\}$

$\dim U = 4 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\dim V = 4 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\dim(U \cap V) = 4 - \underbrace{\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{4:} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Nach Dimensionsformel folgt: $\dim(U+V) = 4$.
Daher folgt $U \cap V = \{0\}$ und $U+V = \mathbb{R}^4$, also $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

1,5

(c) $U := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 0, a_2 = a_3\}$
$V := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 = 0, a_1 = a_3\}$
$W := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = 0, a_1 = a_2\}$

Hier ist $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

1. Bedingung:

$$\boxed{\text{Aus } \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} = \underline{0} \text{ für } \underline{u} \in U, \underline{v} \in V, \underline{w} \in W \text{ folgt } \underline{u} = \underline{v} = \underline{w} = \underline{0}:}$$

Sei

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

für gewisse $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Da $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, $(*)$

sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

Also folgt $a = b = c = 0$,
also $\underline{u} = \underline{v} = \underline{w} = 0$.

2. Bedingung: $\boxed{U + V + W = \mathbb{R}^3}$

Option A:

Aus 1. folgt $U \oplus V \oplus W \subseteq \mathbb{R}^3$,
und $\dim(U \oplus V \oplus W) = \dim U + \dim V + \dim W = 3$.
Also ist $U \oplus V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

Option B:

Die Erzeuger $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von U, V, W
bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$;
sogar eine Basis (wegen $(*)$ oben).

Option C: Explizite Rechnung.

Ansatz:

LGS
$$a\cdot\underset{u}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}+b\underset{v}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}+c\underset{w}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

in Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&x\\1&0&1&y\\1&1&0&z\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&y\\0&1&1&x\\1&1&0&z\end{array}\right)\Big]-$$

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&y\\0&1&1&x\\0&1&-1&z-y\end{array}\right)\Big]-\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&y\\0&1&1&x\\0&0&-2&z-y-x\end{array}\right)\Big|\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&y\\0&1&1&x\\0&0&1&\frac{1}{2}(x+y-z)\end{array}\right)\Big]-\Big]-\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&\frac{1}{2}(-x+y+z)\\0&1&0&\frac{1}{2}(x-y+z)\\0&0&1&\frac{1}{2}(x+y-z)\end{array}\right)$$

Ergebnis:

Jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\tfrac{1}{2}(-x+y+z)\underset{u}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}+\tfrac{1}{2}(x-y+z)\underset{v}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}+\tfrac{1}{2}(x+y-z)\underset{w}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}},$$

liegt also in $U+V+W$.

2

3 | Ideale

Ein **Ideal** in einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Untergruppe I von $(R, +)$ mit der Eigenschaft $r \cdot a \in I$ für alle $r \in R$ und alle $a \in I$. Ein **Hauptideal** in einem kommutativen Ring R ist ein Ideal, das von einem einzigen Element $a \in R$ erzeugt wird, also von der Form $(a) := \{r \cdot a \mid r \in R\}$ ist.

1 (a) Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Zahlen ein Hauptideal in $\mathbb{Z}$ ist.

$2 \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ Ideal:

Untergruppe:
- Summe von geraden Zahlen ist gerade
- a gerade $\Rightarrow$ $-a$ gerade
- 0 gerade

- jedes ganzzahlige Vielfache einer geraden Zahl ist gerade

$2 \cdot \mathbb{Z} = (2)$.

1,5 (b) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal ist.

Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ beliebig.

Falls $I = (0)$ – FERTIG.

Falls $I \neq (0)$, sei $a \in I \setminus \{0\}$ Element von minimalem Betrag. Da I Ideal ist, folgt: auch $-a \in I$.

Also $\exists$ $a > 0$.

Beh: $I = (a)$.

Beweis:

$(\supseteq)$ klar.

$(\subseteq)$ Sei $x \in I$ beliebig. Division mit Rest liefert

$x = q \cdot a + r$ mit $r = 0$ oder $|r| < |a|$.

Nun ist $x \in I$ und $q \cdot a \in I$, also auch

$r = x - q \cdot a \in I$ (da I Untergruppe).

Nach Wahl von a kann also nicht $|r| < |a|$ gelten. Somit $x = q \cdot a \in (a)$. $\square$

(Dasselbe Argument zeigt, dass jedes Ideal in einem euklidischen Ring ein Hauptideal ist.)

1 (c) Zeigen Sie, dass der Kern eines Ringhomomorphismus $R \xrightarrow{f} S$ ein Ideal in R ist.

Wissen bereits, dass $\ker(f)$ Untergruppe ist.
Für $x \in \ker f$, $r \in R$ ist auch $r \cdot x \in \ker f$, denn

$$f(r\cdot x) = f(r)\cdot f(x) = f(r)\cdot 0 = 0.$$

1,5 (d) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Ringe S, für die ein surjektiver Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to S$ existiert.

Die einzigen Ringe, für die eine solche Surjektion existiert, sind die Ring $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{N}_0$:

1 Man prüft leicht, dass
$$\pi_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x]$$
für jedes $a \in \mathbb{N}_0$ ein surjektiver Ringhomomorphismus ist ($\pi_0 = \mathrm{id} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\pi_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow 0$).

2 Sei nun $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow S$ beliebiger surjektiver Ringhomomorphismus. Nach Teil (c) ist $\ker(\pi) = (a)$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Wir können $a \in \mathbb{N}_0$ wählen.
Nach dem Isomorphiesatz 2.25 faktorisiert π als Gruppenhomomorphismus als

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "\pi_a"'] & & S \\
\mathbb{Z}/a\cdot\mathbb{Z} \arrow[r, "\cong", "\bar{\pi}"'] & \mathrm{im}(\pi) \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

π surjektiv.

für einen Gruppenisomorphismus $\bar{\pi}$.
Konkret gilt für alle $x \in \mathbb{Z}$:

(*) $$\bar{\pi}([x]) = \pi(x) \in S.$$

$\bar{\pi}$ ist sogar Ringhomomorphismus:

π Ringhomom.

$$\bar{\pi}([x]\cdot[y]) = ([xy]) \overset{(*)}{=} \pi(xy) = \pi(x)\cdot\pi(y) = \bar{\pi}(x)\cdot\bar{\pi}(y).$$

Also ist $\bar{\pi}$ ein bijektiver Ringhomomorphismus, und somit ein Ringisomorphismus, und somit $S \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ als Ring.

4 | Doppelsymmetrie

5

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $1+1 \neq 0$ in K. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf V in eindeutiger Weise als eine Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform schreiben lässt.

Sei $\varphi : V \times V \longrightarrow K$ Bilinearform.

Eindeutigkeit:

Sei $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ für symmetrische Bilinearform φ^+ und antisymmetrische Bilinearform φ^-.

Dann gilt $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) = \underbrace{\varphi^+(\underline{v},\underline{w}) + \varphi^+(\underline{w},\underline{v})}_{(1+1)\,\varphi^+(\underline{v},\underline{w})} + \underbrace{\varphi^-(\underline{v},\underline{w}) + \varphi^-(\underline{w},\underline{v})}_{\underline{0}}$$

Also folgt

$$\oplus \qquad \tfrac{1}{2}\left(\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v})\right) = \varphi^+(\underline{v},\underline{w}) \quad \left(\text{wobei } \tfrac{1}{2} := (1+1)^{-1}\right).$$

Analog folgt

$$\ominus \qquad \tfrac{1}{2}\left(\varphi(\underline{v},\underline{w}) - \varphi(\underline{w},\underline{v})\right) = \varphi^-(\underline{v},\underline{w})$$

Also sind φ^+ und φ^- eindeutig durch φ bestimmt.

Existenz:

Def: $\varphi^\pm : V \times V \longrightarrow K$ durch $\oplus$ und $\ominus$.

Dann ist $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$,

φ^+ ist symmetrische Bilinearform,

φ^- ist antisymmetrische Bilinearform.