Aufgabe 3

Da $\dim(\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2\times 2)) = 4$, reicht es jeweils die lin. Unabhängigkeit zu überprüfen:

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

- $\underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

  so gilt also $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 0$

  Hans $\Updownarrow$ auch Jaël und Sahura, da Lin. Unabh. unabh. von Reihenfolge

- $\underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

  so gilt also $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_4$ und $\lambda_1 = -\lambda_4$, sodass $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$

  Hunaph

Nun zur darstellenden Matrix der Transpositionsabbildung

$( )^T : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2\times 2) \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$

in den vier Basen:

Hans:

Da $OL^T = OL$, $OR^T = UL$, $UL^T = OR$ und $UR^T = UR$, ergibt sich direkt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jaël und Sahura:

Analog:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hunapú:

Da

$(OL - UR)^T = OL - UR$

und

$(OL + UR)^T = OL + UR$,

erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

(a)

Sei A eine strikte obere Dreiecksmatrix, also von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir U_i für den von den ersten i Standardbasisvektoren erzeugten UVR von K^n (für $i \leq n$), so erhalten wir

$A \cdot v \in U_{i-1}$ (siehe Def. Matrixmult.)

für alle $v \in U_i$ und alle $i \leq n$. Daher erhalten wir $A^n \cdot \underbrace{K^n}_{= U_n} \subset U_0 = \langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset K^n$ und somit ist A^n die Nullmatrix. Also ist A nilpotent.

(b)

Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $A^m = 0$. Dann gilt

$$(\mathbb{1}_n - A)(\mathbb{1}_n + A + \ldots + A^{m-1})$$

$$= (\mathbb{1}_n + \cancel{A} + \cancel{\ldots} + \cancel{A^{m-1}}) - (\cancel{A} + \cancel{A^2} + \cancel{\ldots} + \cancel{A^{m-1}} + \underbrace{A^m}_{=0})$$

$$= \mathbb{1}_n$$

$$= (\mathbb{1}_n + A + \ldots + A^{m-1})(\mathbb{1}_n - A),$$

sodass $\mathbb{1}_n + A + \ldots + A^{m-1}$ das Inverse von $\mathbb{1}_n - A$ ist.

(c)

Wir nutzen Teil (b):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp. (für } m = 3)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbb{1}_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$