

## 1 | Spindel

Welche reellen  $2 \times 2$ -Matrizen kommutieren mit allen reellen  $2 \times 2$ -Matrizen? Das heißt, für welche  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$  gilt:  $AB = BA$  für alle  $B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ ?

**Beh:**  $AB = BA$  für alle  $B$  (1P)  
 $\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:**

( $\Downarrow$ )  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  soll z.B. kommutieren mit ...  
(5P)

$$\dots B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = a \text{ und } b = 0$$

$$\dots B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = 0.$$

$A$  muss also von der Form  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$   
für ein  $a \in \mathbb{R}$  sein.

(11) Für beliebiges  $B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$   
(4P) gilt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aw & ax \\ ay & az \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= B \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

□

## 2 | Schema G

Bringen Sie die folgende Matrix mittels des Gaußverfahrens (a) auf Zeilenstufenform, (b) auf Zeilennormalform, und (c) auf Normalform (siehe Beweis von Satz 6.26). Geben Sie in jedem Schritt an, welche Operation Sie durchführen!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \text{alternativ:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} -3 \\ -4 \end{array} \right] \\ \leftarrow \end{array} \right\} -4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 28 & 5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} +4 \\ +5 \end{array} \right] \\ \leftarrow \end{array} \right\} +5$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \frac{1}{48}$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{array} \right) \quad \downarrow -48$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

7P

Zeilennormalform:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} -4 \quad \uparrow -7$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1,5P

Normalform:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(Spalten-  
vertauschungen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Handwritten annotations: A bracket above the first two rows is labeled "+4". A bracket below the first two rows is labeled "-2". Arrows point from these brackets to the 5th and 6th columns.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Handwritten annotations: A bracket above the second and third rows is labeled "+3". A bracket below the second and third rows is labeled "+1". Arrows point from these brackets to the 5th and 6th columns.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

The first three rows and columns are highlighted in green.

1,5 P

Je Rechenfehler - 0,5 P.

Keine Punkte, wenn Zeilenstufenform / Zeilennormalform / Normalform nicht erreicht wird.