1 | Spindel

Welche reellen 2×2-Matrizen kommutieren mit allen reellen 2×2-Matrizen? Das heißt, für welche $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ gilt: $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

Beh: $AB = BA$ für alle B

$\Updownarrow$ $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. 1P

Beweis:

($\Downarrow$) 5P $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soll z.B. kommutieren mit …

… $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad d = a \text{ und } b = 0$$

… $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad c = 0.$$

A muss also von der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sein.

(⇑) Für beliebiges $B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$

(4P) gilt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aw & ax \\ ay & az \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= B \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

□

2 | Schema G

Bringen Sie die folgende Matrix mittels des Gaußverfahrens (a) auf Zeilenstufenform, (b) auf Zeilennormalform, und (c) auf Normalform (siehe Beweis von Satz 6.26). Geben Sie in jedem Schritt an, welche Operation Sie durchführen!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

alternativ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad -3 \quad -4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 28 & 5 \end{pmatrix} \quad +4 \quad +5$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \tfrac{1}{48}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \quad -48$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7P

Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -4 \quad -7$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1,5P

Normalform:

(Spaltenvertauschungen)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1,5 P

Je Rechenfehler −0,5 P.
Keine Punkte, wenn Zeilenstufenform/Zeilennormalform/Normalform nicht erreicht wird.