Aufgabe 3

(a)

Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum, so besitzt V also eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ der Länge n. Da sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der v_i, $1 \leq i \leq n$, schreiben lasst, zählen wir die Anzahl der Linearkombinationen:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n$$

jeweils p mögliche Wahlen
(ein Element aus $\mathbb{F}_p$)

Also erhalten wir $|V| = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p \cdot p}_{n \text{ mal}} = p^n$.

man kann natürlich auch so für (a) argumentieren:

$V \cong \mathbb{F}_p^n \rightsquigarrow |V| = |\mathbb{F}_p^n| = p^n$

(b)

Wäre $\mathbb{R}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum, so müsste $\mathbb{R} \underset{\text{als } \mathbb{Q}\text{-VR}}{\cong} \mathbb{Q}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten. Damit wäre $\mathbb{R}$ als endliches Produkt abzählbarer Mengen allerdings abzählbar, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Aufgabe 4

Da stets $U_i \subsetneq U_{i+1}$ gelten soll, muss die Dimension von U_{i+1} stets strikt größer sein als die von U_i. Wollen wir nun eine ← maximal lange Fahne finden, so müssen wir die Dimensionen minimal wachsen lassen (also stets um 1). Dann erhalten wir

$$\underbrace{U_0}_{\dim 0} \subsetneq \underbrace{U_1}_{\dim 1} \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{U_{n-1}}_{\dim n-1} \subsetneq \underbrace{U_n}_{\dim n} = V$$

und eine solche Fahne hat Länge n.

So eine Fahne können wir auch ganz einfach finden:

Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so definiert

$$\langle \emptyset \rangle \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

eben eine solche maximal lange Fahne.